FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

A función Zeta de Riemann e o Teorema do número primo

Marcos Villar Pazos

2013-2014

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

A función zeta de Riemann e o Teorema do Número Primo

Marcos Villar Pazos

Septembro 2014

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Álxebra
Título: A función zeta de Riemann e o Teorema do Número Primo
Director/a: D. Antonio García Rodicio
Breve descrición do contido
Breve introdución á función zeta de Riemann e posterior aplicación na demostración do Teorema do Número Primo
Recomendacións
O contido excede con creces a materia de Variable Complexa de 4º curso do grao, pero é moi recomendable manexar ferramenta teórica da mesma. Tales coñecementos dánse por sentados.
Outras observacións
É recomendable manexar criterios de converxencia de series infinitas, como pode ser o Criterio M-Weirstrass, pois no traballo isto tense presente

Índice xeral

Agradecementos

Gustaríame ter un momento, moi breve, de agradecemento por ter a oportunidade de escribir este traballo, algo polo que me considero plenamente afortunado. Tamén de ter a compaña, nos bos e malos momentos, de todas as persoas involucradas no funcionamento da facultade, como son as persoas dedicadas ás tarefas administrativas, os docentes e os propios alumnos, compañeiros todos eles de moitas fatigas.

Como estudante de matemáticas, agradezo os coñecementos transmitidos por parte dos profesores ó longo da carreira, así como a paciencia da que en non poucas ocasións fixeron gala. En xeral, considérome moi afortunado pola experiencia vivida, e espero facer un bó uso da ensinanza recibida.

Dedicatoria:

A miúdo na vida temos que facer fronte a situacións adversas, como nas matemáticas, e aqueles que ante as circunstancias descritas se sobrepoñen, fanse chamar loitadores.

A MIÑA NAI, UNHA LOITADORA

Resumo

No presente traballo preténdese dar unha introdución á función zeta de Riemann e aplicar os resultados obtidos sobre a mesma á demostración do teorema do número primo.

Comezamos introducindo o concepto de produtos infinitos e demostrando os teoremas de factorización de Weierstrass e de Hadamard. A continuación faremos un estudo da función gamma de Euler, incluíndo a súa representación integral e a fórmula de Stirling. Feito isto, estaríamos en condicións de abordar a función zeta de Riemann.

Damos a súa definición como suma dunha serie no semiplano á dereita do punto 1 e probamos a fórmula de Euler sobre a súa descomposición nun produto infinito segundo os números primos. A continuación prolóngase analiticamente a todo o plano complexo a excepción do punto 1 e obtense a ecuación funcional. Culminamos o capítulo probando, coa axuda do teorema de factorización de Hadamard, o teorema De la Vallée-Poussin, que delimita unha rexión do plano na que a función zeta non ten de ceros.

Dito teorema é un dos dous ingredientes fundamentais da demostración que aquí se da do teorema do número primo. O outro ingrediente é a chamada fórmula explícita da función de Chebyshev, a cal da unha representación desta última en termos dos ceros da función zeta.

Abstract

In this work we try to introduce the Riemann Zeta-function and apply the results obtained on the same to demonstrate the prime number theorem .

First of all we start introducing the concepts of infinite products and we demonstrate factorization theorems of Weierstrass and Hadamard. Then we study of the Euler's gamma function, including its integral representation and the Stirling's formula too. Achieved this, we are in optimal conditions to get to know Riemann zeta-function.

We give its definition as a sum of a series in half-plane to the right of point 1 and we demonstrate Euler's formula on its decomposition into a product according to the infinite primes. Next, analytically it extends to the whole complex plane with the exception of point 1 and obtained its functional equation. The chapter culminates demonstrating, helping us the factorization theorem of Hadamard, theorem De la Vallée-Poussin, which delimits a region of the plane where the zeta function is free of zeros.

Last theorem is one of the key ingredient of the proof that here we show about the prime number theorem. The other ingredient is called explicit formula for the Chebyshev function, which consists in a representation in terms of the zeros of the zeta function

Introdución

Para un número real $x > 0$ denotemos por $\pi(x)$ á cantidade de números primos que non exceden x, isto é:

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

O teorema do número primo é un resultado sobre o comportamento asintótico de $\pi(x)$. Concretamente afirma que:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1.$$

Conxecturado por Gauss e Legendre a finais do século XVIII, non foi ata 1896 cando Hadamard e De la Vallée-Poussin ofreceron, de forma independente, a primeira demostración. Na actualidade coñécense demostracións máis cortas e tamén máis elementais ca que aquí amosamos, entre elas a de Paul Erdös e Atle Selberg ofrecida en 1949, que non se usa a teoría de funcións complexas. A cambio o resultado que probamos é máis forte que o teorema do número primos tal e como o anunciamos. Concretamente chegamos ó seguinte resultado:

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(xe^{\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}}\right),$$

onde $c > 0$ é unha constante e

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u}.$$

O camiño preciso que seguimos é o amosado polo autor Anatolij A.Karatsuba nos primeiros capítulos do seu libro “Basic Analytic Number Theory” (segunda edición, Moscow 1983). Debido ó feito de que as demostracións deste libro están comprimidas ó máximo, foinos necesario consultar diversas obras, todas indicadas na bibliografía.

Nos dous primeiros capítulos damos resultados da teoría de funcións de variable complexa que serán necesarios no estudo posterior da función zeta de Riemann.

Os do capítulo 1: sucesión de funcións holomorfas converxendo uniformemente sobre conxuntos compactos e funcións holomorfas definidas por integrais infinitas, están ó nivel dos coñecementos adquiridos na materia de Variable Complexa de cuarto curso impartida nesta facultade.

Os do capítulo 2: produtos infinitos e teoremas de factorización de Weierstrass e de Hadamard, son un pouco máis elevados, e serán precisos para establecer unha relación entre a derivada logarítmica da función zeta e os seus ceros.

No capítulo 3 faise un estudo bastante completo da función gamma de Euler, incluíndo a súa fórmula integral e a fórmula de Stirling. Esta última é importante no senso que describe o comportamento da función gamma, $\Gamma(s)$, cando $|s| \longrightarrow \infty$. Entre as súas consecuencias elementais está a ben coñecida fórmula para o cálculo de limites de sucesións nas que aparece $n!$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1.$$

No capítulo 4 comeza o estudio da función zeta de Riemann,$\zeta(s)$, dando a súa primeira definición:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{para} \quad \mathrm{Re} s = \sigma > 1.$$

O primeiro resultado importante, establecido por Euler, é a descomposición da función $\zeta(s)$ sobre os números primos:

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \quad \text{para} \quad \mathrm{Re} s = \sigma > 1,$$

en onde p recorre os infinitos números primos.

A continuación abórdase a prolongación analítica da función $\zeta(s)$ a todo o plano complexo, con excepción do punto 1, conxuntamente ca súa ecuación funcional. Para tal fin usamos o resultado coñecido visto na materia de Series de Fourier de terceiro curso que afirma que a serie de Fourier dunha función de variable real C^∞ e de período $T = 1$, converxe absoluta e uniformemente á función. Definindo:

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

a ecuación funcional da función $\zeta(s)$ toma a forma:

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

A función así definida resulta ser enteira de orde 1, e os seus ceros son precisamente os ceros non triviais da función $\zeta(s)$. É por medio dela que podemos aplicar aquí o teorema de factorización de Hadamard, para obter unha relación entre a derivada logarítmica de $\zeta(s)$ e os seus ceros. Esta relación intervén decisivamente na demostración do teorema de De la Vallée-Poussin, que delimita unha rexión do plano onde a función $\zeta(s)$ é libre de ceros.

No capítulo 5, e último, comezamos introducindo a función de Chebyshev:

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n),$$

onde Λ é a función de Mangoldt:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{se } n = p^k \\ 0, & \text{se } n \neq p^k \end{cases}$$

Esta función $\psi(x)$, é, por unha parte, moi doado de relacionar ca función $\pi(x)$, que aparece no enunciado do teorema do número primo, e por outra, e isto xa non é tan doado, cos ceros non triviais da función $\zeta(s)$. Esta última relación é a denominada fórmula explícita da función de Chebyshev. De tal fórmula, e da rexión libre de ceros ofrecida no teorema De la Vallée-Poussin, obtense a seguinte igualdade:

$$\psi(x) = x + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\right),$$

e de aquí dedúcese, xa doadamente, a igualdade mencionada para $\pi(x)$ e o teorema do número primo.

Notación

Por $c, c_0, c_1, \ldots$, entenderemos que nos estamos referindo a constantes absolutas positivas, que en xeral serán diferentes segundo o teorema.

Para un número positivo A, a notación $B = O(A)$ e $B \ll A$ significa que $|B| \leq cA$.

$\varepsilon, \varepsilon_1$ son constantes positivas pequenas. A excepción do capítulo 2, $p, p_1, \ldots$, denotan números primos.

Se f_n é unha sucesión de funcións, a notación $f_n \rightrightarrows f$ indícanos que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente.

Para $x > 0$, o logaritmo e a integral logarítmica defínense como:

$$\ln x = \log x = \int_1^x \frac{du}{u}; \mathrm{Li}\, x = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + c_0,$$

onde

$$c_0 = \lim_{\delta \longrightarrow 0} \left(\int_0^{1-\delta} \frac{du}{\ln u} + \int_{1+\delta}^2 \frac{du}{\ln u} \right); \exp F = e^F.$$

A función

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{se } n = p^k \\ 0, & \text{se } n \neq p^k \end{cases}$$

denomínase función de Mangoldt.

A función de Chebyshev $\psi(x)$, e a función para contar números primos $\pi(x)$, son respectivamente, as definidas como:

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n); \quad \pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

Para calquera número real α, a parte enteira de α, denotarase por $[\alpha]$, e a parte fraccionaria de α, escrito $\{\alpha\}$, é $\alpha - [\alpha]$.

$s = \sigma + it$ denotará a un número complexo, onde $i^2 = -1$, $Res = \sigma$, $Ims = t$ e $\overline{s} = \sigma - it$.
A constante
$$\gamma = \lim_{m \longrightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \ln m \right)$$
denomínase constante de Euler.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Funcións holomorfas

Definición 1.1. Sexa $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aberto e $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ unha función. Dise que f é holomorfa en s_0 de Ω se f é derivable, ou equivalentemente, $\mathbb{C}$-diferenciable en tódolos puntos dun entorno do punto s_0. Diremos que f é holomorfa en Ω se o é en cada punto de Ω. Se $\Omega = \mathbb{C}$, dirase que f é unha función enteira.

O conxunto de tódalas funcións holomorfas nun aberto Ω denotarase por $\mathcal{H}(\Omega)$.

É sabido que no corpo dos números complexos toda función holomorfa é analítica. Sen embargo, este resultado non atopa o seu homólogo no corpo dos números reais. O teorema que establece as claves é o seguinte, que aquí só enunciaremos:

Teorema 1.2 (analiticidade de funcións holomorfas)**.** *Se f é holomorfa nun aberto Ω do plano complexo, entón f é analítica en Ω. Ademais a serie de Taylor da función f centrada nun punto s_0 representa a dita función no maior disco aberto de centro s_0 contido en Ω.*

Como consecuencia do anterior teorema temos o seguinte Corolario:

Corolario 1.3. *Sexan Ω un aberto non baleiro de $\mathbb{C}$ e p un punto de Ω. Se f é unha función holomorfa en $\Omega - \{p\}$ e continua en Ω, entón f é holomorfa en Ω.*

Teorema 1.4 (de Morera)**.** *Sexan Ω un aberto do plano complexo e f unha función continua en Ω tal que $\int_{\partial\triangle} f = 0$ para toda rexión triangular $\triangle \subset \Omega$. Entón $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Os resultados enunciados con anterioridade, son coñecidos por un alumno de 4º curso de matemáticas.

O seguinte teorema seranos de utilidade en gran número de demostracións:

Teorema 1.5. *Supoñamos que f_n é unha sucesión de funcións holomorfas nun subconxunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ para $n = 1, 2, \dots$, e que $f_n \rightrightarrows f$ en subconxuntos compactos de Ω. Entón f é holomorfa en Ω, e $f_n' \rightrightarrows f'$ en subconxuntos compactos de Ω.*

Proba. A hipóteses $f_n \rightrightarrows f$ en subconxuntos compactos de Ω garante que $f \in \mathcal{C}(\Omega)$.

Sexa $\triangle \subset \Omega$ unha rexión triangular. Entón $\triangle$ é compacto e polo teorema de rexións triangulares de Cauchy:

$$\int_{\partial\triangle} f(u)du = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\triangle} f_n(u)du = 0.$$

Temos así que:

$$\begin{cases} f \in \mathcal{C}(\Omega), \\ \int_{\partial\triangle} f(u)du = 0, \\ \Omega \subset \mathbb{C} \quad \text{aberto.} \end{cases}$$

Das tres anteriores, polo Teorema de Morera, séguese que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Sexa agora $K \subset \Omega$ un compacto. Existe $0 < r < \rho = dist(u, \partial K)$ tal que a unión $E = \bigcup_{u\in K} \overline{D}(u; r)$ dos discos pechados, $\forall\, u \in K$, é un subconxunto compacto en Ω.

Entón, como $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ aplicando a fórmula integral de Cauchy para as derivadas á función $f - f_n$, acoutando modularmente, obtemos que:

$$|f'(u) - f_n'(u)| \leq sup\left\{|f - f_n| \,:\, u \in K\right\} r^{-1} = \|f' - f_n'\|_E\, r^{-1}.$$

Agora, posto que por hipóteses $f_n \rightrightarrows f$, dado $\varepsilon > 0$ existirá un número natural $N(\varepsilon)$ tal que para calquera que sexa $n \geq N(\varepsilon)$ cumprirase que $|f - f_n| < \varepsilon$, $\forall\, u \in K \subset \Omega$.

Así que:

$$|f' - f_n'| < \varepsilon,\, \forall u \in K \subset \Omega \Rightarrow f_n' \rightrightarrows f'$$

en subconxuntos compactos de Ω. □

1.2. Funcións holomorfas definidas por integrais

Teorema 1.6. *Sexan $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aberto e $f : [a,b] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ unha aplicación continua tal que a función $f(u, -) : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa para cada $u \in [a,b]$.*

Consideremos a función:

$$g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(s) = \int_a^b f(u,s)du.$$

Entón $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ e

$$g'(s_0) = \int_a^b f(u,s)du.$$

Proba. Sexa $s_0 \in \Omega$. Dado que Ω é aberto, existirá un entorno de s_0, $B(s_0, R)$, con $R > 0$, tal que $B(s_0, R) \subset \Omega$. Sexa $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < R$ e denotemos por $\gamma := \partial^+ B(s_0, R)$. Sexa $M \geq 0$ unha cota da función continua f no compacto $[a, b] \times \overline{B}(s_0, r)$:

$$|f(u, s)| \leq M \quad \forall\, u \in [a, b], \quad \forall\, s \in \overline{B}(s_0, r).$$

A fórmula integral de Cauchy permítenos escribir:

$$f(u, s_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(u, \omega)}{\omega - s_0} d\omega \quad \forall\, u \in [a, b].$$

Entón:

$$g(s_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left[\int_\gamma \frac{f(u, \omega)}{\omega - s_0} d\omega \right] du.$$

Por outra banda debido á fórmula integral de Cauchy das derivadas tamén podemos escribir:

$$\frac{\partial f}{\partial s}(u, s_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(u, \omega)}{(\omega - s_0)^2} d\omega.$$

Sexa $h \in \mathbb{C}$ de xeito que $s_0 + h \in B\left(s_0, \frac{r}{2}\right)$. Entón para $\omega \in \gamma^*$, resulta:

$$|\omega - (s_0 + h)| \geq |\omega - s_0| - |h| > |\omega - s_0| - \frac{r}{2} = r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}.$$

Agora de

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h(\omega - s_0 - h)} - \frac{1}{h(\omega - s_0)} &= \frac{1}{(\omega - s_0 - h)(\omega - s_0)} \\
&= \frac{1}{(\omega - s_0)^2} + \frac{h}{(\omega - s_0 - h)(\omega - s_0)^2},
\end{aligned}$$

deducimos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\frac{g(s_0 + h) - g(s_0)}{h} &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left[\int_\gamma \frac{f(u, \omega)}{h(\omega - s_0 - h)} d\omega \right] du - \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left[\int_\gamma \frac{f(u, \omega)}{h(\omega - s_0)} d\omega \right] du \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left[\int_\gamma \frac{f(u, \omega)}{(\omega - s_0)^2} d\omega \right] du - \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left[\int_\gamma \frac{h \cdot f(u, \omega)}{(\omega - s_0 - h)(\omega - s_0)^2} d\omega \right] du \\
&= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(u, s_0) du + \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left[\int_\gamma \frac{h \cdot f(u, \omega)}{(\omega - s_0 - h)(\omega - s_0)^2} d\omega \right] du.
\end{aligned}$$

Logo para $s_0 + h \in B\left(s_0, \frac{r}{2}\right)$, temos que:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{g(s_0 + h) - g(s_0)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(u, s_0) du \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_a^b \left[\int_\gamma f(u, \omega) \cdot \frac{h}{(\omega - s_0 - h)(\omega - s_0)^2} d\omega \right] du \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}(b - a) 2\pi r M \frac{2|h|}{r^3} = \frac{2M(b - a)}{r^2} |h|,
\end{aligned}$$

que pasando a límites cando $h \longrightarrow 0$ resulta:

$$0 \leq \left| \frac{g(s_0+h)-g(s_0)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(u,s_0)du \right| \leq \frac{2M(b-a)}{r^2}|h| \longrightarrow 0,$$

logo

$$g'(s_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(u,s_0).$$

□

As seguintes definicións serán de utilidade:

Diremos que unha función $f : [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é $\mathcal{R}$-integrable se se verifican:

1) $f \in \mathcal{R}[a,x], \forall x \geq a,$

2) Existe $\lim_{x \longrightarrow \infty} \int_a^x f$.

En tal caso defínese:

$$\int_a^\infty f := \lim_{x \longrightarrow \infty} \int_a^x f,$$

e denomínase integral de Riemann de f en $[a,\infty)$.

No caso complexo dise que $f : [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ é $\mathcal{R}$-integrable en $[a,\infty)$ se Ref e Imf son $\mathcal{R}$-integrables en $[a,\infty)$. Isto equivale a que se verifique:

1) $f \in \mathcal{R}[a,x], \forall x \geq a,$

2) Existe $\lim_{x \longrightarrow \infty} \int_a^x f$.

Neste caso:

$$\begin{aligned}\int_a^\infty f := \lim_{x\to\infty} \int_a^x f = \lim_{x\to\infty} \left[\int_a^x Ref + i \int_a^x Imf \right] \\ = \lim_{x\to\infty} \int_a^x Ref + i \lim_{x\to\infty} \int_a^x Imf = \int_a^\infty Ref + i \int_a^\infty f.\end{aligned}$$

En ambos casos, o anterior pode expresarse dicindo que a integral $\int_a^\infty f$ é converxente.

Proposición 1.7. *Sexa $f : [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f \in \mathcal{R}[a,x]\ \forall\, x \geq a$. Se $|f| \in \mathcal{R}[a,\infty)$, entón $f \in \mathcal{R}[a,\infty)$ e ademais:*

$$\left| \int_a^\infty f \right| \leq \int_a^\infty |f|.$$

Proba. Dende que $f \in \mathcal{R}[a,x]\ \forall\, x \geq a$, tamén serán $Ref,\ Imf \in \mathcal{R}[a,x]\ \forall\, x \geq a$.

Posto que $0 \leq |Ref(x)| \leq |f(x)|$, $0 \leq |Im\, f(x)| \leq |f(x)|\ \forall\, x \in [a,\infty)$, temos que $|Ref|,\ |Imf| \in \mathcal{R}[a,\infty)$, e entón $Ref,\ Imf \in \mathcal{R}[a,\infty)$.

Ademais:

$$\left|\int_a^\infty f\right| = \left|\lim_{x\to\infty}\int_a^x f\right| = \lim_{x\to\infty}\left|\int_a^x f\right| \leq \lim_{x\to\infty}\int_a^x |f| = \int_a^\infty |f|.$$

□

Definición 1.8. Sexa $S \subset \mathbb{C}$ e $f : [a,\infty)\times S \longrightarrow \mathbb{C}$ unha aplicación e supoñamos que a integral $\int_a^\infty f(u,s)du$ é converxente para cada $s \in S$. Dise que a integral $\int_a^\infty f(u,s)du$ é uniformemente converxente sobre S se:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu \in [a,\infty) \text{ tal que se } b > \nu, \text{ entón } \left|\int_a^b f(u,s)du - \int_a^\infty f(u,s)du\right| < \varepsilon\ \forall\, s \in S.$$

Determinar se unha integral indefinida é converxente en ocasións pode resultar laborioso. Para lograr tal obxectivo serán de utilidade os seguintes dous teoremas:

Teorema 1.9. *Sexan $f : [a,\infty)\times S \longrightarrow \mathbb{C}$ e $\phi : [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dúas aplicacións verificando:*

i) $f(-,s) \in \mathcal{R}[a,x] \quad \forall\, x \in [a,\infty), \quad \forall\, s \in S,$
ii) $|f(u,s)| \leq \phi(u) \quad \forall\, (u,s) \in [a,\infty)\times S,$
iii) A integral $\int_a^\infty \phi(u)du$ *é converxente.*

Entón a integral $\int_a^\infty f(u,s)du$ é uniformemente converxente sobre S.

Proba. Dado que a integral $\int_a^\infty \phi(u)du$ é converxente de $|f(u,s)| \leq \phi(u)du$ dedúcese que $|f(u,s)| \in \mathcal{R}[a,\infty)$. Logo $f(-,s) \in \mathcal{R}[a,\infty)$, ou se se prefire, a integral $\int_a^\infty f(u,s)du$ é converxente para cada $s \in S$.

Imos ver que a converxencia é uniforme.

Sexa $\varepsilon > 0$ dado. Dende que a integral $\int_a^\infty \phi(u)du$ é converxente, existirá $\nu \in [a,\infty)$ tal que:

$$\int_b^\infty \phi(u)du = \int_a^\infty \phi(u)du - \int_a^b \phi(u)du < \varepsilon \quad \forall\, b > \nu.$$

Entón se $b > \nu$, temos que:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(u,s)du - \int_a^\infty f(u,s)du\right| &= \left|\int_b^\infty f(u,s)du\right| \leq \int_b^\infty |f(u,s)du| \\ &\leq \int_b^\infty \phi(u)du < \varepsilon \quad \forall\, s \in S.\end{aligned}$$

□

Teorema 1.10. *Sexan $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aberto e $f : [a, \infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ unha aplicación continua. Supoñamos que:*

i) A integral $\int_a^\infty f(u,s)du$ converxe uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$.

ii) $f(u, -) : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa para calquera $u \in [a, \infty)$.

Entón a función

$$g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(s) = \int_a^\infty f(u,s)du,$$

é holomorfa en Ω e

$$g'(s_0) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial s}(u, s_0)du \quad \forall\, s_0 \in \Omega.$$

Ademais esta última integral converxe uniformemente sobre cada compacto de Ω.

Proba. Sexa $u_0 < u_1 < \cdots < u_n < \ldots$, unha sucesión en $[a, \infty)$ tal que $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$. A esta $\{u_n\}$ asociámoslle a sucesión de funcións $\{g_n\}$ onde:

$$g_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g_n(s) = \int_a^{u_n} f(u,s)du.$$

Entón, polo teorema 1.6 tense que $g_n \in \mathcal{H}(\Omega)$, e que

$$g_n'(s_0) = \int_a^{u_n} \frac{\partial f}{\partial s}(u, s_0)du, \quad \forall\, s_0 \in \Omega.$$

Vexamos que $\{g_n\} \rightrightarrows g$ sobre cada compacto de Ω.

Sexa $K \subset \Omega$ un compacto e sexa $\varepsilon > 0$. Dado que por hipóteses a integral converxe uniformemente sobre K, existirá un $\nu \in [a, \infty)$ tal que se $b > \nu$ entón:

$$\left| \int_a^b f(u,s)du - \int_a^\infty f(u,s)du \right| < \varepsilon \quad \forall\, s \in K.$$

Tomemos n_0 de xeito que $u_{n_0} > \nu$. Entón para $n \geq n_0$ será $u_n > u_{n_0} > \nu$, e polo tanto:

$$\left| \int_a^{u_n} f(u,s)du - \int_a^\infty f(u,s)du \right| = |g_n(s) - g(s)| < \varepsilon, \quad \forall\, s \in K,$$

isto é

$$\{g_n\} \rightrightarrows g, \quad \forall\, s \in K,$$

o que proba a converxencia uniforme sobre cada compacto $K \subset \Omega$.

Consecuentemente polo teorema 1.5 $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, e ademais:

$$\{g_n'\} \rightrightarrows g',$$

sobre cada compacto $K \subset \Omega$.

Polo teorema 1.6 tense que $\frac{\partial f}{\partial s}(-, s_0) \in \mathcal{R}[a, x]$ para cada $s_0 \in \Omega$ e cada $x \in [a, \infty)$.

Vexamos que

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^x \frac{\partial f}{\partial s}(u, s_0)du = g'(s_0)$$

uniformemente sobre cada compacto de Ω, co cal se terá

$$g'(s_0) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial s}(u, s_0)du$$

sendo uniforme a converxencia da integral sobre cada compacto de Ω.

Pola contra, supoñamos que a converxencia non é uniforme. Entón existiría un compacto $K \subset \Omega$ e un $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\nu \in [a, \infty)$ hai un $x_\nu > \nu$ e un $s_\nu \in K$ con:

$$\left| \int_a^{x_\nu} \frac{\partial f}{\partial s}(u, s_\nu)du - g'(s_\nu) \right| \geq \varepsilon.$$

Isto implica a existencia dunha sucesión $u_0 < u_1 < \cdots < u_n < \cdots$, en $[a, \infty)$ con $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$, tal que para cada n hai un $s_n \in K$ verificando:

$$\left| \int_a^{u_n} \frac{\partial f}{\partial s}(u, s_n)du - g'(s_n) \right| \geq \varepsilon.$$

En efecto, existe $u_0 > a$ e $s_0 \in K$ tal que

$$\left| \int_a^{u_0} \frac{\partial f}{\partial s}(u, s_0)du - g'(s_0) \right| \geq \varepsilon.$$

Unha vez construída u_n, existe $u_{n+1} > 1 + u_n$ e $s_{n+1} \in K$ tal que:

$$\left| \int_a^{u_{n+1}} \frac{\partial f}{\partial s}(u, s_{n+1})du - g'(s_{n+1}) \right| \geq \varepsilon.$$

A sucesión $\{u_n\}$ así construída indutivamente, ten as propiedades indicadas.

Séguese que a sucesión de funcións $\{g_n\}$ asociada á sucesión $\{u_n\}$, verifica que $\{g_n'\}$ non converxe uniformemente sobre K a g', o que é absurdo. □

NOTA:Existen resultados análogos para integrais de segunda especie, é dicir, da forma

$$\int_a^b f(u, s)du,$$

sendo f unha función completamente definida en $(a, b] \times S$.

1.3. Fórmulas de sumación.

Teorema 1.11. *Consideremos unha sucesión de números complexos* $\{a_n\}$ *e sexa* $A(x)$ *a función sumatoria:*

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a_n, \quad A(x) = 0, \quad x > 1.$$

Entón, para calquera función complexa $\varphi(u)$*, de variable real* u*, definida para* $u \geq 0$*, verifícanse as seguintes igualdades:*

1)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi(k) = A(n)\varphi(n) - \sum_{k=1}^{n-1} A(k) \left(\varphi(k+1) - \varphi(k)\right), \tag{1}$$

2) Se $\varphi(u)$ *admite derivada continua* $\varphi'(u)$ *en* $(0, \infty)$*, entón, para* $x \geq 1$ *:*

$$\sum_{k \leq x} \varphi(k) = A(x)\varphi(x) - \int_1^x A(u)\varphi'(u)du, \tag{2}$$

3) Se ademais $A(x)\varphi(x) \to 0$ *cando* $x \to \infty$*, entón:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi(k) = -\int_1^{\infty} A(u)\varphi'(u)du. \tag{3}$$

Proba. 1) Como $a_k = A(k) - A(k-1)$, podemos poñer:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi(k) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) \Delta A(k).$$

Aplicando a transformación de Abel, e tendo en conta que $A(0) = 0$, obtemos:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi(k) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) \Delta A(k) = \varphi(n)A(n) - \sum_{k=1}^{n-1} A(k)(\varphi(k+1) - \varphi(k)),$$

de onde obtemos a identidade (1).

2) Sexa $n = [x]$, e supoñamos que $\varphi'(u)$ é continua en $(0, \infty)$. Entón:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} A(k)(\varphi(k+1) - \varphi(k)) &= \sum_{k=1}^{n-1} A(k) \int_k^{k+1} \varphi'(u)du = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} A(u)\varphi'(u)du \\ &= \int_1^n A(u)\varphi(u)\varphi'(u)du, \end{aligned} \tag{4}$$

xa que $A(u) = A(k) \quad \text{para} \quad k \leq u \leq k+1$.

Por outra parte,

$$\int_n^x A(u)\varphi'(u)du = A(n)(\varphi(x) - \varphi(n)) = A(x)\varphi(x) - A(n)\varphi(n),$$

é dicir,

$$A(n)\varphi(n) = A(x)\varphi(x) - \int_n^x A(u)\varphi'(u)du. \tag{5}$$

Substituíndo (4) e (5) en (1), resulta:

$$\sum_{k=1}^n a_k\varphi(k) = A(x)\varphi(x) - \int_1^n A(u)\varphi'(u)du - \int_n^x A(u)\varphi'(u)du,$$

de onde se obtén a identidade (2).

3) Se $A(x)\varphi(x) \to 0, \quad x \to \infty$, entón, pasando a límites en (2) cando $x \to \infty$, obtemos:

$$\sum_{k=1}^\infty a_k\varphi(k) = -\int_1^\infty A(u)\varphi'(u)du,$$

que é a identidade (3). $\square$

Fórmula de sumación de Abel

Sexa $a \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq a \leq x$. Tendo en conta a fórmula (2), temos que:

$$\sum_{n\leq x} a_n\varphi(n) = A(x)\varphi(x) - \int_1^x A(u)\varphi'(u)du,$$

$$\sum_{n\leq a} a_n\varphi(n) = A(a)\varphi(a) - \int_1^a A(u)\varphi'(u)du.$$

Restando ambas, obtemos a fórmula de sumación de Abel:

$$\sum_{a<n\leq x} a_n\varphi(n) = A(u)\varphi(u)\Big|_a^x - \int_a^x A(u)\varphi'(u)du. \tag{6}$$

Fórmula de sumación de Euler

É un caso particular. Tomando $a_k = 1$, temos que $A(x) = [x]$ e (6) adopta a forma:

$$\sum_{a<n\leq x} \varphi(n) = [u]\varphi(u)\Big|_a^x - \int_a^x [u]\varphi'(u)du = u\varphi(u)\Big|_a^x - \{u\}\varphi(u)\Big|_a^x - \int_a^x u\varphi'(u)du + \int_a^x \{u\}\varphi'(u)du.$$

Agora,

$$\int_a^x t\varphi'(u)du = u\varphi(u)\Big|_a^x - \int_a^x \varphi(u)du,$$

que substituíndo, obtemos a fórmula de sumación de Euler:

$$\sum_{a<n\leq x}\varphi(n)=\int_a^x\varphi(u)du+\int_a^x\{u\}\varphi'(u)du-\{u\}\varphi(u)\big|_a^x.$$

Outra expresión da fórmula de sumación de Euler

Consideremos a función dada por $\rho(u)=\frac{1}{2}-\{u\}$. Esta función é de período $T=1$ e cumpre a condición $|\rho(u)|\leq\dfrac{1}{2}$. Ademais, para $0\leq x<1, \quad \rho(u)=\dfrac{1}{2}-u$.

Expresando $\{u\}$ mediante $\rho(u)$ na fórmula de sumación de Euler, resulta:

$$\sum_{a<n\leq x}\varphi(n)=\int_a^x\varphi(u)du+\int_a^x\left(\frac{1}{2}-\rho(u)\right)\varphi'(u)du-\left(\frac{1}{2}-\rho(u)\right)\varphi(u)\bigg|_a^x,$$

de onde

$$\sum_{a<n\leq x}\varphi(n)=\int_a^x\varphi(u)du-\int_a^x\rho(u)\varphi'(u)du+\rho(u)\varphi(u)\bigg|_a^x.$$

A última igualdade é a segunda expresión da fórmula de sumación de Euler.

Nota: Algúns autores empregan a notación $\rho_1(u)=\{u\}-\frac{1}{2}$, para referirse á función $\rho(u)$ que anteriormente presentamos na fórmula de sumación de Euler. Concretamente neste traballo empregámola para probar a fórmula de Stirling que máis adiante veremos. Ademais, neste caso na fórmula de Euler, $a=0$ e $x=m$ é un natural. Co fin de que non dea lugar a confusión, estableceremos no seguinte lema unha fórmula de sumación de Euler para o devandito caso.

Lema 1.12. *Se* $f\in C^1([0,n],\mathbb{R})$, *entón:*

$$\sum_{k=0}^{n}f(k)=\int_0^n f(u)du+\frac{1}{2}\left(f(n)+f(0)\right)+\int_0^n\rho_1(u)f'(u)du,$$

onde $\rho_1(u)=\{u\}-\dfrac{1}{2}$.

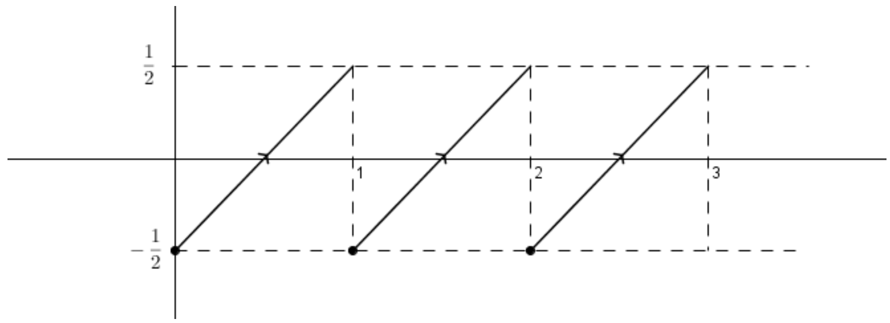
Proba.

A función ρ_1 é continua salvo nos enteiros, en onde verifica:

$$\lim_{u\to k^+}\rho_1(u)=\rho_1(k)=-\frac{1}{2},\quad \lim_{u\to k^-}\rho_1(u)=\frac{1}{2}\neq-\frac{1}{2}=\rho_1(k).$$

Ademais,

$$\rho_1'(u)=1 \quad \text{se} \quad u\notin\mathbb{Z}.$$



Defínese:

$$\overline{\rho_1} : [k-1,k] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \overline{\rho_1}(u) = \begin{cases} \overline{\rho_1}(u) & \text{se} \quad u \neq k, \\ \dfrac{1}{2} & \text{se} \quad u = k. \end{cases}$$

A función $\overline{\rho_1}$ é continua en $[k-1,k]$ e $\overline{\rho_1}'(u) = 1 \; \forall \, u \in [k-1,k]$. Ademais:

$$\int_{k-1}^{k} \overline{\rho_1}(u) f'(u) du = \int_{k-1}^{k} \rho_1(u) f'(u) du.$$

Aplicando a esta última integral a fórmula de integración por partes, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{k-1}^{k} \rho_1(u) f'(u) du &= [\overline{\rho_1}(u) f(u)]_{k-1}^{k} - \int_{k-1}^{k} f(u) du \\ &= \frac{1}{2} f(k) + \frac{1}{2} f(k-1) - \int_{k-1}^{k} f(u) du. \end{aligned}$$

Sumando dende $k=1$ ata $k=n$:

$$\int_{0}^{n} \rho_1(u) f'(u) du = \frac{1}{2} f(n) + \frac{1}{2} f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_{0}^{n} f(u) du.$$

Sumando $\dfrac{1}{2}\,(f(n) + f(0))$ a cada membro:

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_{0}^{n} f(u) du + \frac{1}{2}\,(f(n) + f(0)) + \int_{0}^{n} \rho_1(u) f'(u) du.$$

□

Lema 1.13 (Identidade de Abel)**.** *Sexa* $\{c_n\}$ *unha sucesión de números complexos. Sexan* a, b *números reais con* $0 < a < b$ *e* $f \in C^1([a,b], \mathbb{C})$ *. Consideremos a función:*

$$c : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad c(x) = \sum_{a<n\leq x} c_n.$$

Entón:

$$\sum_{a<n\leq b} c_n f(n) = -\int_a^b c(x)f'(x)dx + c(b)f(b).$$

Proba.

$$\begin{aligned}
c(b)f(b) - \sum_{a<n\leq b} c_n f(n) &= \left(\sum_{a<n\leq b} c_n\right) f(b) - \sum_{a<n\leq b} c_n f(n) = \sum_{a<n\leq b} c_n (f(b) - f(n)) \\
&= \sum_{a<n\leq b} c_n \int_n^b f'(x)dx = \sum_{a<n\leq b} \int_a^b c_n g(n,x) f'(x)dx,
\end{aligned}$$

onde:

$$g(n,x) := \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n \leq x \leq b, \\ 0 & \text{se} \quad a \leq x \leq n. \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
c(b)f(b) - \sum_{a<n\leq b} c_n f(n) &= \int_a^b \sum_{a<n\leq b} c_n g(n,x) f'(x)dx = \int_a^b \sum_{a<n\leq b} c_n f'(x)dx \\
&= \int_a^b c(x)f'(x)dx.
\end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Produtos infinitos

2.1. Produtos infinitos. A factorización de Weierstrass

Definición 2.1. Dada unha sucesión de números complexos $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, de xeito que $u_n \neq -1 \; \forall\, n = 1, 2, \ldots$, un produto infinito é unha expresión da forma:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n) = (1+u_1)\cdot(1+u_2)\cdots(1+u_n)\cdots \tag{1}$$

Se a expresión adopta a forma:

$$\prod_{n=1}^{k}(1+u_n) = (1+u_1)\cdot(1+u_2)\cdots(1+u_k) = v_k, \tag{2}$$

diremos simplemente que é un produto parcial.

Definición 2.2. Se $\lim_{k\to\infty} v_k = v$, con $v \in \mathbb{C} - \{0\}$, diremos que o produto infinito (1) converxe. En tal caso,

$$v = \lim_{k\to\infty} v_k = \prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n). \tag{3}$$

Diremos que é diverxente se $v = 0$ ou $\lim_{k\to\infty} v_k = \infty$.

Exemplos:
1.
Consideremos o produto infinito dado por

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)\cdots,$$

entón

$$v_k = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{k+1}{k} = k+1,$$

logo

$$\lim_{k\to\infty} v_k = \infty,$$

e así o produto diverxe.

2.

Consideremos agora o produto infinito dado por

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\cdots ,$$

neste caso

$$v_k = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdots\frac{(k-1)(k+1)}{k\cdot k} = \frac{1}{2}\frac{k+1}{k},$$

logo

$$\lim_{k\to\infty} v_k = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2},$$

e así o produto converxe a $\frac{1}{2}$.

A continuación establecemos unha relación entre a converxencia absoluta de series e produtos infinitos. É conveniente coñecer resultados previos relativos á converxencia de produtos infinitos co que aquí amosamos. Unha boa referencia para tal fin é o libro [3] da bibliografía. Nós iremos demostrando os resultados que sexan necesarios para a proba dos teoremas do libro [4] da bibliografía, no que se basea este traballo.

Teorema 2.3. *Se a serie de números complexos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converxe absolutamente, entón o produto* (1) *é converxente.*

Proba. Da definición (1) de produto infinito, debe ser $u_n \neq -1$.

Afirmamos que se a serie $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+u_n)$ é converxente, entón o produto (1) tamén o é. En efecto, sexan:

$$v_k = \prod_{n=1}^{k}(1+u_n) \quad \text{e} \quad S_k = \sum_{n=1}^{k}\ln(1+u_n).$$

Entón:

$$\begin{aligned} e^{S_k} &= e^{\ln(1+u_1)}\cdot e^{\ln(1+u_2)}\cdots e^{\ln(1+u_k)} \\ &= (1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_k) = v_k. \end{aligned}$$

Supoñamos que $\lim S_k = S \neq \infty$. Da continuidade da exponencial, e da igualdade anterior, séguese:

$$\lim_{k\to\infty} v_k = \lim_{k\to\infty} e^{S_k} = e^{(\lim_{k\to\infty} S_k)} = e^{S} \neq 0.$$

A definición 2.2 corrobora a afirmación.

Observación: O recíproco deste resultado tamén se dá, é dicir, a converxencia do produto infinito (1) implica a da serie logarítmica. Como diximos pode consultarse [3].

Por hipóteses a serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converxe absolutamente, entón $\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$. Consecuentemente, sen perda de xeneralidade, podemos asumir que $|u_n| \leq \frac{1}{2}$ para $n > N$.

Bastará ver que a serie $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+u_n)$ é converxente.

Sexa $u_n = \alpha_n + i\beta_n \in \mathbb{C}$.

Distingamos os casos:

Se $u_n = \alpha_n \in \mathbb{R}$, para $n = 1, 2, \dots$, temos que:

$$\begin{aligned}|\ln(1+u_n)| = \left| \left(\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{u_n^m}{m} \right) \right| &\leq |u_n| \left(1 + \frac{|u_n|}{2} + \frac{|u_n|^2}{3} + \cdots \right) \\ &\leq |u_n| \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \right) = |u_n| \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2|u_n|.\end{aligned}$$

Polo tanto $|\ln(1+u_n)| \leq 2|u_n|$, e como por hipóteses a serie $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ é converxente, séguese que a serie $\sum_{n=1}^{\infty} |\ln(1+u_n)|$ tamén o é, logo o produto (1) é converxente.

Se $u_n = \alpha_n + i\beta_n, \quad$ con $\quad \beta_n \neq 0$, estamos no caso complexo, e o razoamento é o mesmo que no caso anterior, ca salvidade da definición do logaritmo, é dicir, probaremos que tanto a parte real como imaxinaria converxen, é dicir, que cando $n \longrightarrow \infty$ as dúas seguintes converxen:

$$|v_n| = |(1+u_1)\cdots(1+u_n)| = |(1+u_1)|\cdots|(1+u_n)|, \tag{4}$$

$$\arg v_n = \arg(1+u_1)\cdots(1+u_n) = \arg(1+u_1) + \cdots + \arg(1+u_n). \tag{5}$$

O feito de que (4) sexa converxente é equivalente a que $|v_n|^2$ o sexa, pero:

$$|1+u_n|^2 = \left(\sqrt{(1+\alpha_n)^2 + \beta_n^2}\right)^2 = 1 + \alpha_n^2 + \beta_n^2 + 2\alpha_n,$$

onde $\mathrm{Re}u_n = \alpha_n$ e $\mathrm{Im}u_n = \beta_n$.

Agora, posto que $|\alpha_n^2 + \beta_n^2 + 2\alpha_n| \leq |\alpha_n^2 + \beta_n^2| + |2\alpha_n| \leq |u_n|^2 + 2|u_n|$, de novo a hipóteses sobre a converxencia absoluta da serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ garante a converxencia de $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|^2$.

A converxencia de (5) é debido ó feito de que para n_0 suficientemente grande e $n > n_0$, temos que:

$$|\arg(1+u_n)| = \left| \mathrm{arcsen} \frac{\beta_n}{\sqrt{(1+\alpha_n)^2 + \beta_n^2}} \right| < \pi|\beta_n|,$$

o que garante a converxencia de $\arg v_n$. $\square$

Exemplo: Consideremos o produto:

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^s} \right),$$

onde $s \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Temos que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}},$$

con $\sigma = \mathrm{Re} s$.

Polo tanto para $\sigma > 1$ a anterior serie é converxente, e consecuentemente o produto infinito.

Estudemos agora produtos infinitos cuxos factores son funcións de variable complexa.

Teorema 2.4. *Sexa $u_n(s)$ unha sucesión de funcións analíticas nun aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Supoñamos que:*

a) $u_n(s) \neq -1$ para $n = 1, 2, \dots,$ e $s \in \Omega$,

b) $|u_n(s)| \leq a_n$ para $n = 1, 2, \dots,$ e $s \in \Omega$,

c) a serie de números $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é converxente.

Entón o produto dado por:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(s)), \tag{6}$$

converxe para todo $s \in \Omega$, e a función $v(s)$ definida por:

$$v(s) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(s)),$$

é analítica no aberto Ω. Ademais, $v(s) \neq 0$ para $s \in \Omega$.

Proba. Como por hipóteses a serie de números $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é converxente e para todo n, $|u_n(s)| \leq a_n$, séguese que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(s)$ converxe absolutamente para todo $s \in \Omega$ e polo teorema 2.3 o produto (6) é converxente.

Para probar que $v(s) \in \mathcal{A}(\Omega)$ veremos que a sucesión de funcións $v_k(s) \rightrightarrows v(s)\ \forall\, s \in \Omega$, onde:

$$v_k(s) = \prod_{n=1}^{k} (1 + u_n(s)).$$

Denotaremos por $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n) = p, \quad (1 + a_1) \cdots (1 + a_n) = p_n$.

Primeiramente vexamos que para calquera $s \in \Omega$ verifícase que:

$$\left| \frac{v(s)}{v_n(s)} - 1 \right| \leq \frac{p}{p_n} - 1 \tag{7}$$

En efecto, se $k \geq 1$, entón:

$$\begin{aligned}\left|\frac{v_{n+k}(s)}{v_n(s)}-1\right| &= \left|\frac{\prod_{n=1}^{n+k}(1+u_n(s))}{\prod_{m=1}^{n}(1+u_m(s))}-1\right| = \left|\frac{(1+u_1(s))(1+u_2(s))\cdots(1+u_{n+k}(s))}{(1+u_1(s))(1+u_2(s))\cdots(1+u_n(s))}-1\right| \\ &= |(1+u_{n+1}(s))(1+u_{n+2}(s))\cdots(1+u_{n+k}(s))-1| \\ &= |u_{n+1}(s)+\cdots+u_{n+k}(s)+u_{n+1}(s)u_{n+2}(s)+\cdots+u_{n+1}(s)\cdots u_{n+k}(s)| \\ &\leq a_{n+1}+\cdots+a_{n+k}+\cdots+a_{n+1}a_{n+2}+\cdots+a_{n+1}\cdots a_{n+2} = \frac{p_{n+k}}{p_n}-1.\end{aligned}$$

Agora, $\text{lím}_{k\longrightarrow\infty}\dfrac{p_{n+k}}{p_n}-1 = \dfrac{p}{p_n}-1$, que é a expresión (7), e polo tanto:

$$|v(s)-v_n(s)| = |v_n(s)|\left|\frac{v(s)}{v_n(s)}-1\right| \leq p_n\left(\frac{p}{p_n}-1\right) = p-p_n < \varepsilon, \quad \forall\, n > n_0(\varepsilon), \quad \text{e} \quad \forall\, s \in \Omega.$$

Estamos dicindo que:

$$v_n(s) \rightrightarrows v(s)$$

e en virtude do teorema 1.5 conclúese que $v(s) \in \mathcal{H}(\Omega) \Rightarrow v(s) \in \mathcal{A}(\Omega)$.

Finalmente $v(s) \neq 0$, pois se $v(s) = 0$, existiría polo menos un n_0 tal que $(1+u_{n_0}) = 0$, logo $u_{n_0} = -1$, pero isto é contraditorio cas hipóteses. □

Os seguintes resultados que vamos obter gardan relación con funcións enteiras. Sen máis preámbulos:

Teorema 2.5. *Sexa $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, unha sucesión infinita de números complexos verificando:*

i) $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots |a_n| \leq \cdots$,

ii) *e* $\text{lím}_{n\to\infty}\dfrac{1}{|a_n|} = 0$.

Entón existe unha función enteira $G(s)$ de quen os ceros son precisamente os números a_n, e se algún destes ceros a_n son iguais, entón o mencionado cero terá a respectiva multiplicidade.

Proba. Para $n = 1, 2, \ldots$, vamos a considerar:

$$u_n = u_n(s) = \left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}},$$

e o produto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n(s) \tag{8}$$

Probaremos que o anterior produto converxe para cada $s \neq a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, e é unha función enteira $G(s)$ con ceros $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

Consideremos o círculo C de radio $|a_n|$ e o produto infinito $\prod_{r=n}^{\infty} u_r(s)$. Veremos que converxe en C a unha función analítica, e polo tanto (8) tamén o será, que terá, no interior de C, só os ceros a_i con $|a_i| \leq |a_n|$, e dado que $|a_n| \to \infty$, o teorema quedará probado.

É sabido que se $|s| < 1$ entón:

$$\ln(1-s) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^{n+1}}{n+1},$$

equivalentemente

$$(1-s) = e^{-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^{n+1}}{n+1}} \quad \text{se} \quad |s| < 1.$$

Pois ben, para $|s| < |a_n|$ e $r \geq n$, tense que:

$$\begin{aligned} u_r(s) &= \left(1 - \frac{s}{a_r}\right) e^{\frac{s}{a_r} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_r}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{r-1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r-1}} \\ &= e^{-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{s}{a_r}\right)^{n+1}}{n+1}} e^{\frac{s}{a_r} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_r}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{r-1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r-1}} \\ &= e^{-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{s}{a_r}\right)^{n+1}}{n+1} + \frac{s}{a_r} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_r}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{r-1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r-1}} \\ &= e^{-\sum_{n=r-1}^{\infty} \frac{\left(\frac{s}{a_r}\right)^{n+1}}{n+1}}. \end{aligned}$$

Así que:

$$u_r(s) = e^{-\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r - \frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1} - \cdots}$$

Deste xeito, é suficiente probar a converxencia absoluta da serie:

$$\sum_{r=n}^{\infty} \left[\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r + \frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1} + \cdots\right] \quad \text{para } |s| < |a_n| \tag{9}$$

Para calquera $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ e $|s| \leq (1-\varepsilon)|a_n|$, temos que:

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r + \frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1} + \cdots\right| \leq \left|\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r\right| + \left|\frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1}\right| + \cdots = \\ &\quad = \frac{1}{r}\left|\left(\frac{s}{a_r}\right)\overbrace{\cdots}^{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)\right| + \frac{1}{r+1}\left|\left(\frac{s}{a_r}\right)\overbrace{\cdots}^{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)\right| + \cdots \\ &\quad \leq \frac{1}{r}\left[\frac{(1-\varepsilon)|a_r|}{|a_r|}\overbrace{\cdots}^{r}\frac{(1-\varepsilon)|a_r|}{|a_r|}\right] + \frac{1}{r+1}\left[\frac{(1-\varepsilon)|a_r|}{|a_r|}\overbrace{\cdots}^{r+1}\frac{(1-\varepsilon)|a_r|}{|a_r|}\right] + \cdots \\ &\quad < \frac{1}{r}[(1-\varepsilon)^r + (1-\varepsilon)^{r+1} + \cdots] \\ &\quad = \frac{1}{r}\sum_{r=n}^{\infty}(1-\varepsilon)^r = \frac{1}{r} \cdot \frac{(1-\varepsilon)^r}{1-(1-\varepsilon)} = \frac{(1-\varepsilon)^r}{r\varepsilon}. \end{aligned}$$

Polo tanto, dado que a serie

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{(1-\varepsilon)^r}{r\varepsilon},$$

é converxente, polo criterio M-Weierstrass séguese que a serie

$$\sum_{r=n}^{\infty} \left| \frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r + \frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1} + \cdots \right|$$

tamén o é, e en consecuencia a serie (9) converxe absolutamente, e así a función (8) é analítica no círculo C.

Ver agora que os ceros de $G(s) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{s}{a_n}\right) e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}}$, son precisamente $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, é inmediato, co que se conclúe. □

Corolario 2.6 (A fórmula de Weierstrass)**.** *Sexa $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, unha sucesión de números complexos verificando as condicións do teorema 2.5. Entón, para calquera número natural m, a función $G(s)$ definida por:*

$$G(s) = s^m \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right) e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}}$$

é enteira e os seus ceros son $0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

Proba. É consecuencia inmediata da demostración que se acaba de facer. □

Corolario 2.7. *Sexa $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, unha sucesión de números complexos verificando as condicións do teorema 2.5 e supoñamos que existe un número enteiro $p \geq 0$ tal que a serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$$

é converxente. Entón a función $G_1(s)$ definida por:

$$G_1(s) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right) e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p}},$$

verifica o teorema 2.5.

Proba. Sexa

$$G_1(s) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right) e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p}}.$$

Se $n-1 > p$, é dicir, se $n > p+1$:

$$\left(1-\frac{s}{a_n}\right) e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}} = \left(1-\frac{s}{a_n}\right) e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p}+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}},$$

co cal:

$$\begin{aligned}
G(s) &= \prod_{n=1}^{p}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}}\cdot\prod_{n=p+1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}}\\
&= \prod_{n=1}^{p}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}}\cdot\prod_{n=p+1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p}}\cdot\\
&\cdot\prod_{n=p+1}^{\infty}e^{\frac{1}{p+1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}}\\
&= \prod_{n=1}^{p}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}}\cdot\prod_{n=p+1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p}}\cdot\\
&\cdot e^{\sum_{n=p+1}^{\infty}\left[\frac{1}{p+1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}\right]}.
\end{aligned}$$

E como

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{p}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p}}\cdot e^{-\frac{1}{n}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n}-\cdots-\frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p}} = {} & \prod_{n=1}^{p}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p}}\cdot\\
& \cdot e^{-\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n}+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p}},
\end{aligned}$$

resulta que

$$G(s) = G_1(s)\cdot e^{-\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n}+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p}}\cdot e^{\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{p+1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}}.$$

Deste xeito, bastará ver que a serie

$$\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{p+1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1},$$

define unha función enteira, é dicir, que a serie converxe uniformemente sobre cada compacto de $\mathbb{C}$.

Sexa pois $K\subset\mathbb{C}$ un compacto e sexa $R>0$ tal que $K\subset B(0,R)$. Das hipóteses sobre os a_n, debe existir un m tal que $|a_m|\geq 2R$, co cal, $|s|\leq\frac{1}{2}|a_m|$ calquera que sexa $s\in K$.

Como os módulos de $|a_m|$ non decrecen, se pode supoñer $m>p+1$. Como

$$\begin{aligned}
\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{p+1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1} = {} &\\
&= \sum_{n=p+1}^{m-1}\frac{1}{p+1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}+\\
&+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{p+1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1},
\end{aligned}$$

abonda con ver que

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{p+1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}$$

converxe uniformemente sobre K.

Para $s \in K$ e $n \geq m$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{p+1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}\right| &\leq \frac{1}{p+1}\frac{|s|^{p+1}}{|a_n|^{p+1}} + \cdots + \frac{1}{n-1}\frac{|s|^{n-1}}{|a_n|^{n-1}} \\
&\leq \frac{1}{p+1}\frac{|s|^{p+1}}{|a_n|^{p+1}} + \cdots + \frac{1}{p+1}\frac{|s|^{n-1}}{|a_n|^{n-1}} \\
&\leq \frac{1}{p+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}\frac{|a_m|^{p+1}}{|a_n|^{p+1}} + \cdots + \frac{1}{p+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{|a_m|^{n-1}}{|a_n|^{n-1}} \\
&\leq \frac{1}{p+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}\frac{|a_m|^{p+1}}{|a_n|^{p+1}} + \cdots + \frac{1}{p+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}\frac{|a_m|^{p+1}}{|a_n|^{p+1}} \\
&= \frac{1}{p+1}\frac{|a_m|^{p+1}}{|a_n|^{p+1}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\
&\leq \frac{1}{p+1}\frac{|a_m|^{p+1}}{|a_n|^{p+1}}\left[\sum_{r=p+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{r}\right] \\
&= \frac{1}{p+1}\frac{|a_m|^{p+1}}{|a_n|^{p+1}}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{p+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{p}\frac{|a_m|^{p+1}}{|a_n|^{p+1}}.
\end{aligned}$$

Polo tanto, no compacto K, a serie funcional

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{p+1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1},$$

está limitada pola serie numérica

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{p+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{p}\frac{|a_m|^{p+1}}{|a_n|^{p+1}},$$

que é converxente, de feito, absolutamente converxente, xa que:

$$\sum_{n=m}^{\infty}\left|\frac{1}{p+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{p}\frac{|a_m|^{p+1}}{|a_n|^{p+1}}\right| = \frac{1}{p+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{p}|a_m|^{p+1}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^{p+1}} < \infty \text{ (por hipóteses).}$$

Isto proba o corolario. □

Teorema 2.8. *Cada función enteira $G(s)$ pode ser representada da forma:*

$$G(s) = e^{H(s)} s^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{a_n}\right) e^{\frac{s}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}},$$

onde $H(s)$ é unha función enteira e os números $0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, son os ceros de $G(s)$. Ademais, se a sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ verifica as condicións do corolario 2.7, entón

$$G(s) = e^{H(s)} s^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{a_n}\right) e^{\frac{s}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p}}$$

Proba. Os ceros da función $G(s)$ os podemos colocar en orde de módulo crecente da forma seguinte:

$$0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots \leq |a_n| \leq \cdots$$

e como $|a_n| \longrightarrow \infty$, será $\lim_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{1}{|a_n|} = 0$, e de aquí séguese polo teorema 2.5 que existe unha función $G_1(s)$ que ten exactamente os mesmos ceros que a función $G(s)$. Así pois, a función definida por:

$$\varphi(s) = \frac{G(s)}{G_1(s)}, \text{ para } s \neq a_n, \ \varphi(a_n) = \lim_{s \to a_n} \varphi(s),$$

é non nula e $\varphi(s) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ por se cociente de funcións enteiras non anulándose o denominador.

Como $\varphi(s) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e $\varphi(s) \neq 0$ existirá unha función enteira, digamos $H(s)$, tal que $\varphi(s) = e^{H(s)}$.

Con isto probamos a primeira parte do teorema, a segunda próbase de forma completamente análoga, so que en lugar do teorema 2.5 empregamos o corolario 2.7. □

<u>Reseña matemática</u>: *Karl Weierstrass (1815-1897). Foi un matemático alemán. Aínda que nos seus inicios académicos estudou comercio e finanzas, atendendo aos consellos do seu pai, non tardou en abandonar estes para involucrarse no estudo das ciencias matemáticas. Largo período da súa vida dedicouno a ensinanza secundaria. Foi unha publicación súa sobre funcións abelianas a que sorprendeu a comunidade científica. Por dito traballo recibiu o doutorado honorífico da Universidade de Königsberg e en 1856 foi aceptado como profesor asociado na Universidade de Berlín. Deu as definicións de continuidade, límite e derivada dunha función o que permitiu facer a demostración de varios teoremas, entre eles, o teorema do valor medio. Por todos é coñecida a súa contribución sobre criterios de converxencia de series infinitas, pois moitas das xustificacións levan o seu nome. Sábese que no final da súa vida non o pasou demasiado ben no que a súa saúde se refire. A responsabilidade do cargo que ostentou como profesor fíxolle coller unha baixa de dous anos, e máis adiante as disputas da época con outros matemáticos non lle fixeron gran favor. Tralo falecemento dunha amiga súa fundiuse mentalmente, e o resto dos seus días pasounos nunha cadeira de rodas*

2.2. Funcións enteiras de orde finito.

As seguintes definicións serán de utilidade no desenrolo das posteriores demostracións:

Definición 2.9. Sexa $G(s)$ unha función enteira, e sexa

$$M(r) = M_G(r) = \text{máx}\{|G(s)| : |s| = r\}$$

Se existe unha constante $a > 0$ tal que

$$M(r) < e^{r^a} \quad \text{para } r > r(a) > 0, \tag{10}$$

entón diremos que a función $G(s)$ é unha función enteira de orde finito. En tal caso, o número $\alpha = \text{ínf}(a)$, se dirá que é o orde de $G(s)$. Se a ecuación (10) non pode ser satisfeita, para calquera $a > 0$, entón diremos que a orde de $G(s)$ é ∞.

O anterior tamén o podemos manifestar dicindo que unha función enteira $G(s)$ é de orde finito se existe un numero real $a > 0$ verificando:

$$|G(s)| < e^{|s|^a} \ \forall\, |s| > 0,$$

é dicir, existe $r_a > 0$ tal que

$$|G(s)| < e^{|s|^a} \ \forall\, s \text{ con } |s| > r_a$$

Nótese que o caso no que $a \leq 0$, a anterior definición non ten especial interese, pois estaríamos ante unha función enteira e acoutada, e polo teorema de Liouville sería constante.

Observación:

Se $G(s)$ é unha función enteira de orde α e $\varepsilon > 0$, entón

$$M_G(r) < e^{r^{\alpha+\varepsilon}}, \ \forall\, r > 0.$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\alpha + \varepsilon > \alpha = \text{ínf}\left\{a > 0/M_G(r) < e^{r^a}, \ r > 0\right\} \\
\Rightarrow \exists a > 0 \text{ con } M_G(r) < e^{r^a}, \ \forall\, r > 0 \text{ tal que } \alpha + \varepsilon \geq a \\
\Rightarrow M_G(r) < e^{r^a} \leq e^{r^{\alpha+\varepsilon}}, \ \forall\, r > 0.
\end{aligned}$$

Teorema 2.10. *A orde α dunha función enteira ven dada pola fórmula*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} = \alpha, \quad (r = |s|)$$

Proba. Supoñamos $\alpha < \infty$.

Como f é unha función enteira de orde finito α, dado $\varepsilon > 0$ temos que

$$M(r) < e^{r^{\alpha+\varepsilon}}.$$

Por outra parte, tamén existe un s en módulo suficientemente grande para o cal

$$M(r) > e^{r^{\alpha-\varepsilon}}.$$

Destas dúas tomando logaritmos a ambos lados, dúas veces, obtemos

$$\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} < \alpha + \varepsilon, \quad \forall\, r > R_\varepsilon; \quad \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} > \alpha - \varepsilon, \quad \text{para algún}\, r > R_\varepsilon,$$

é dicir

$$\alpha - \varepsilon \leq \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} \leq \alpha + \varepsilon,$$

co cal

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} = \alpha.$$

Se $\alpha = \infty$, para calquera $a > 0$ temos que

$$M(r) > e^{r^a},$$

ou equivalentemente

$$\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} > a,$$

para algúns valores de r suficientemente grandes. Polo tanto, neste caso

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} = \infty.$$

$\square$

Exemplo 2.11. Queremos atopar a orde de $F(s) = e^{bs^n}$ con $b \neq 0$ e n un enteiro positivo.

Expresando b e s en forma exponencial, temos

$$b = |b|e^{i\theta_1}, \quad s = re^{i\theta_2}$$

Dado que

$$|e^{bs^n}| = e^{\mathrm{Re}(bs^n)},$$

e

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(bs^n) &= \mathrm{Re}|b|r^n e^{i\theta_1}(e^{i\theta_2})^n = \mathrm{Re}|b|r^n(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)(\cos(n\theta_2 + i\,\mathrm{sen}(n\theta_2)) \\ &= |b|r^n\cos(\theta_1 + n\theta_2),\end{aligned}$$

séguese que

$$|F(s)| = e^{|b|r^n \cos(\theta_1 + n\theta_2)} \leq e^{|b|r^n},$$

e así

$$M_F(r) = M(r) = e^{|b|r^n}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \alpha = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} &= \lim_{r\to\infty} \left(\frac{\ln\ln(e^{|b|r^n})}{\ln r} \right) \\ = \lim_{r\to\infty} \left(\frac{\ln(|b|r^n)}{\ln r} \right) &= \lim_{r\to\infty} \left(\frac{\ln|b| + n\ln r}{\ln r} \right) \\ = \lim_{r\to\infty} \left(\frac{\ln|b|}{\ln r} + n \right) &= n. \end{aligned}$$

Lema 2.12. *Para unha función enteira f verifícase:*

i) Se f ten orde α e un cero de multiplicidade k en $s = 0$, entón a función g definida por $g(s) = \frac{f(s)}{s^k}$, ten orde α.

ii) Se f ten orde α e λ é un complexo non nulo, entón λf ten orde α.

Proba. Probamos i).

Por unha banda temos que

$$M_g(r) = \max \left\{ \left| \frac{f(s)}{s^k} \right| : |s| = r \right\} = \frac{1}{r^k} M_f(r).$$

Agora como f é de orde α, dado $\varepsilon > 0$ será $M_f(r) < e^{r^{\alpha+\varepsilon}}$, e así

$$M_g(r) < \frac{1}{r^k} e^{r^{\alpha+\varepsilon}}, \ \forall\, r > 0.$$

logo a orde de g é $\leq \alpha + \varepsilon$, e como é certo para todo $\varepsilon > 0$, a orde é $\leq \alpha$.

Se $\alpha = 0$, entón a orde de g sería ≤ 0, e como a orde é sempre ≥ 0, debe ser $\alpha = 0$.

Supoñamos entón $\alpha > 0$, e vexamos que a orde de g non pode ser menor que α, co cal será α, necesariamente.

Pola contra supoñamos que a orde de g é $\alpha - \varepsilon$. Entón $\alpha - \varepsilon \geq 0$.

Como

$$\lim_{r\to\infty} \frac{k\ln r}{r^{\alpha - \frac{\varepsilon}{2}}} = 0,$$

$\exists r_1 > 0$ tal que $\frac{k\ln r}{r^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}} < 1$ se $r > r_1$, ou de forma equivalente,

$$r^k < e^{r^{\alpha - \frac{\varepsilon}{2}}}, \ \text{se } r > r_1.$$

Por outra parte,(pola observación feita na definición de orde), existe r_2 tal que $M_g(r) < e^{r^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}$ se $r > r_2$. Ademais, existe r_3 tal que $2 \leq r^{\frac{\varepsilon}{3}}$ se $r > r_3$.

Tomando $r > \max\{r_1, r_2, r_3\}$, temos que:

$$\begin{aligned} M_f(r) &= r^k M_g(r) < e^{r^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}} e^{r^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}} \\ &= e^{2r^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}} \leq e^{r^{\frac{\varepsilon}{3}} r^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}} \\ &= e^{r^{\alpha-\frac{\varepsilon}{6}}}, \end{aligned}$$

é dicir, a orde de f e estritamente menor que α, o que é absurdo, co cal a orde de g debe ser α.

Probamos ii).

Dende que f é de orde α, dado $\varepsilon > 0$ existe $r > r_0$ tal que $\ln M_f(r) < r^{\alpha+\varepsilon}$.

Como

$$M_{\lambda f}(r) = \max\{|\lambda f(s)| : |s| = r\} = |\lambda| M_f(r),$$

para $r > r_0$ temos que

$$\ln |M_{\lambda f}(r)| = \ln |\lambda| + \ln |M_f(r)| \leq \ln |\lambda| + r^{\alpha+\varepsilon}.$$

Tomando r suficientemente grande de xeito que

$$r^{\alpha+\varepsilon} \geq 1 \text{ e } r^{\varepsilon} - 1 \geq \ln |\lambda|,$$

resulta que

$$\ln |\lambda| \leq r^{\alpha+\varepsilon}(r^{\varepsilon} - 1),$$

é dicir,

$$\ln |\lambda| + r^{\alpha+\varepsilon} \leq r^{\alpha+2\varepsilon},$$

e así

$$\ln |M_{\lambda f}(r)| \leq r^{\alpha+2\varepsilon},$$

co cal λf ten orde menor ou igual que α, e razoando igual que en i) obtense o resultado. □

O resultado fundamental desta sección é o seguinte teorema. Antes de involucrarnos na súa demostración estableceremos unha serie de lemas auxiliares que nos permitirán conseguir tal obxectivo.

Teorema 2.13 (Factorización de Hadamard)**.** *Sexa $G(s)$ unha función enteira de orde finito α. Sexa s_n a sucesión formada por tódolos ceros de $G(s)$, escritos de acordo ca súa multiplicidade. Entón existe unha factorización de Weierstrass de $G(s)$ da forma:*

$$G(s) = s^k e^{g(s)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{s_n}\right) e^{\frac{s}{s_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{p}\left(\frac{s}{s_n}\right)^p},$$

onde $p = [\alpha]$ e a función $g(s)$ é un polinomio de grao $\leq p$.

O anterior é o coñecido teorema de factorización de Hadamard. Como xa dixemos, a súa proba require dunha serie de resultados auxiliares, que nos facilitarán a súa comprensión.

Lema 2.14. *Sexa $G(s)$ unha función enteira tal que $G(0) = 1$. Para cada par de números reais $r > 0$ e $\lambda > 1$, tense que:*

$$n(r) \ln \lambda \leq \ln M(\lambda r),$$

onde $n(r)$ denota o número de ceros de $G(s)$ en $\overline{B}(0, r)$ contados cada un tantas veces como a súa multiplicidade indique, e $M(r) = \text{máx}\{|G(s)| : |s| = r\}$.

Proba. Sexa $R := \lambda r$ con $0 < r < R$ e denotemos por $m = n(r)$.

Abonda con ver que

$$\left(\frac{R}{r}\right)^m \leq M(R).$$

Consideremos a función $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$F(s) = G(s) \prod_{n=1}^{m} \frac{R^2 - s\overline{s_n}}{R(s - s_n)}, \quad s \neq s_n,$$
$$F(s_n) = \lim_{s \longrightarrow s_n} G(s) \prod_{n=1}^{m} \frac{R^2 - s\overline{s_n}}{R(s - s_n)},$$

onde $s_1, s_2, \dots, s_n$ son os ceros da función $G(s)$ en $\overline{B}(0, r)$.

A función $F(s)$ así definida é analítica no círculo $|s| \leq R$, por ser cociente de funcións holomorfas non anulándose o denominador, e, para $|s| = R$ temos que:

$$\begin{aligned}
|F(s)| &= \left| G(s) \prod_{n=1}^{m} \frac{R^2 - s\overline{s_n}}{R(s - s_n)} \right| = |G(s)| \cdot \left| \prod_{n=1}^{m} \frac{R^2 - s\overline{s_n}}{R(s - s_n)} \right| \\
&= |G(s)| \cdot \left| \frac{R^2 - s\overline{s_1}}{R(s - s_1)} \right| \cdot \left| \frac{R^2 - s\overline{s_2}}{R(s - s_2)} \right| \cdots \left| \frac{R^2 - s\overline{s_m}}{R(s - s_m)} \right| \\
&= |G(s)| \cdot \left| \frac{|s|^2 - s\overline{s_1}}{|s|(s - s_1)} \right| \cdot \left| \frac{|s|^2 - s\overline{s_2}}{|s|(s - s_2)} \right| \cdots \left| \frac{|s|^2 - s\overline{s_m}}{|s|(s - s_m)} \right| \\
&= |G(s)| \cdot \left| \frac{s\overline{s} - s\overline{s_1}}{|s|(s - s_1)} \right| \cdot \left| \frac{s\overline{s} - s\overline{s_2}}{|s|(s - s_2)} \right| \cdots \left| \frac{s\overline{s} - s\overline{s_m}}{|s|(s - s_m)} \right| \\
&= |G(s)| \cdot \frac{|s| \cdot |\overline{s} - \overline{s_1}|}{|s| \cdot |(s - s_1)|} \cdot \frac{|s| \cdot |\overline{s} - \overline{s_2}|}{|s| \cdot |(s - s_2)|} \cdots \frac{|s| \cdot |\overline{s} - \overline{s_m}|}{|s| \cdot |(s - s_m)|}
\end{aligned}$$

Polo tanto, para $|s| = R$, temos que $|F(s)| = |G(s)|$, e como $F \in \mathcal{H}(C)$, sendo C o círculo $|s| \leq R$, polo principio do módulo máximo séguese que:

$$|F(0)| \leq \text{máx}\{|F(s)| : |s| = R\} = \text{máx}\{|G(s)| : |s| = R\} = M(R).$$

Como

$$F(0) = G(0)\prod_{k=1}^{m}\frac{R}{-s_k} = \prod_{k=1}^{m}\frac{R}{-s_k},$$

resulta

$$\prod_{k=1}^{m}\frac{R}{|s_k|} = |F(0)| \le M(R),$$

e así

$$\left(\frac{R}{r}\right)^m = \frac{R^m}{r^m} \le \frac{R^m}{\prod_{k=1}^{m}|s_k|} = \prod_{k=1}^{m}\frac{R}{|s_k|} \le M(R).$$

□

Corolario 2.15. *Sexa $G(s)$ unha función enteira de orde α e sexa s_n a sucesión dos ceros non nulos de $G(s)$ contados cada un tantas veces como a súa multiplicidade indique. Entón:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|s_k|^{\alpha+\varepsilon}},$$

é converxente, para cada $\varepsilon > 0$.

Proba. Se pode supoñer que existen infinitos s_j, do contrario o resultado é trivial.

Fixemos $\varepsilon > 0$.

Como cada reordenación dunha serie converxente de termos positivos é tamén converxente, podemos colocar os ceros en orde de módulo crecente da forma:

$$0 < |s_1| \le |s_2| \le \cdots \le |s_n| \le \cdots .$$

Así mesmo, podemos supoñer que $G(0) \neq 0$, pois se $G(s)$ tivese en $s = 0$ un cero de multiplicidade k, entón a función $F(s) = \frac{G(s)}{s^k}$ é unha función enteira con $F(0) \neq 0$, que ten os mesmos ceros que $G(s)$ e polo lema 2.12 a mesma orde α.

Se pode supoñer que $G(0) = 1$, pois se $c = G(0) \neq 1$, entón a función $F(s) = c^{-1}G(s)$ ten os mesmos ceros non nulos que $G(s)$, e tamén polo lema 2.12, a mesma orde α que $G(s)$.

Nestas condicións tomando $\lambda = e$ no lema previo 2.14 deducimos:

$$n(r) \le \ln M(er),$$

sendo $r > 0$ e $n(r)$ o números de $G(s)$ en $\overline{B}(0, r)$.

Sexa η tal que $0 < \eta < \varepsilon$. Entón dende que $G(s)$ é de orde α, existirá r_0 tal que

$$M(er) < e^{(er)^{\alpha+\frac{\eta}{2}}},\ \forall\, r > r_0,$$

é dicir

$$\ln M(er) < (er)^{\alpha+\frac{\eta}{2}},\ \forall\, r > r_0,$$

e así
$$n(r) < (er)^{\alpha+\frac{\eta}{2}}.$$
De aquí séguese que existe r_1 tal que
$$n(r) < r^{\alpha+\eta},\ \forall\, r > r_1.$$
Dado que
$$0 < |s_1| \leq |s_2| \leq \cdots \leq |s_n| \leq \cdots\ ,$$
resulta que
$$k \leq n(|s_k|) \leq |s_k|^{\alpha+\eta},$$
sempre que k sexa maior ou igual que un certo k_0, (calculado a partir de r_1), e k_0 será tal que $|a_k| > r_1$ para todo $k \geq k_0$.

Temos pois que
$$k^{\frac{1}{\alpha+\eta}} \leq |s_k|,\ \forall\, k \geq k_0,$$
co cal
$$\frac{1}{|s_k|} \leq \frac{1}{k^{\frac{1}{\alpha+\eta}}},$$
ou equivalentemente
$$\frac{1}{|s_k|^{\alpha+\varepsilon}} \leq \frac{1}{k^{\frac{\alpha+\epsilon}{\alpha+\eta}}},\ \forall\, k \geq k_0.$$
Sen embargo $\frac{\alpha+\epsilon}{\alpha+\eta} > 1$ pois $\alpha + \eta < \alpha + \epsilon$ polo que a serie armónica
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{\alpha+\epsilon}{\alpha+\eta}}},$$
é converxente, e dado que
$$\frac{1}{|s_k|^{\alpha+\epsilon}} \leq \frac{1}{k^{\frac{\alpha+\epsilon}{\alpha+\eta}}},$$
conclúese que a serie
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|s_k|^{\alpha+\epsilon}}$$
é converxente, como queríamos ver. □

Observación:

As seguintes serán de utilidade na proba do posterior lema:

1) $\int_0^{2\pi} \cos(kx+a)dx = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N} - 0,\ \forall a \in \mathbb{R}.$

2) $\int_0^{2\pi} \cos(kx+a)\cos(nx+b)dx = \begin{cases} 0 \text{ se } k \neq n, \\ \pi \text{ se } k = n \in \mathbb{N} - \{0\}, \text{ e } a = b. \end{cases}$

Proba. Para 1),

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx+a)dx = \frac{1}{k}\operatorname{sen}(kx+a)\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

En 2) para $k = n \neq 0$ e $a = b$, temos:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(kx+a)dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2(kx+a)}{2}dx = \pi,$$

e para $k \neq n$, da igualdade xeral

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos(\alpha)\cos(\beta),$$

séguese que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos(kx+a)\cos(nx+b)dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((k+n)x+(a+b))dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((k+n)x-(a+b))dx = 0.\end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.16 (Borel-Caratheodory)**.** *Sexan $R > 0$ e $f(s)$ unha función holomorfa nun aberto que contén a $\overline{B}(s_0,R)$. Sexa $M \in \mathbb{R}$ tal que $Ref(s) \leq M$ sobre o círculo para calquera $s \in \partial\overline{B}(s_0,R)$. Entón*

a) $\frac{1}{n!}|f^{(n)}(s_0)| = |a_n| \leq 2M - Ref(s_0)R^{-n},\ n \geq 1;$

b) no disco $|s-s_0| \leq r < R$, tense que:

i) $|f(s) - f(s_0)| \leq 2\{M - Ref(s_0)\}\frac{r}{R-r},$

ii) $|f^{(n)}(s)| \leq 2n!\{M - Ref(s_0)\}\frac{R}{(R-r)^{n+1}},\ n \geq 1$

Proba. Dende que $f(s)$ e analítica no círculo $|s-s_0| \leq R$ a serie de Taylor da función $f(s)$ centrada en s_0 representa a dita función no maior círculo aberto de centro s_0 que contén o disco $|s-s_0| \leq R$. Ademais a fórmula integral de Cauchy para as derivadas permítenos escribir $a_n = \frac{f^n(s_0)}{n!}$.

Probaremos $a)$.

Primeiramente supoñamos que $s_0 = 0$ e $a_0 = f(0) = 0$.

Para $a_k = |a_k|e^{i\theta_k}$, $s = Re^{i\theta}$, $s \in \partial\overline{D}(0,R)$, temos que

$$\begin{aligned} f(s) = f(Re^{i\theta}) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(Re^{i\theta}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| e^{i\theta_k} R^k \left(e^{i\theta}\right)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| R^k \left(\cos(\theta_k) + i \operatorname{sen}(\theta_k)\right) \left(\cos(k\theta) + i \operatorname{sen}(k\theta)\right), \end{aligned}$$

onde aplicamos a fórmula De Moivre, e así

$$\mathrm{Re} f(Re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| R^k \cos(k\theta + \theta_k) \tag{16}$$

Agora para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ a serie da anterior igualdade é converxente, xa que:

$$||a_k| R^k \cos(k\theta + \theta_k)| \leq |a_k| R^k,$$

e como por hipóteses $f(s)$ é analítica no disco $|s - s_0| \leq R$, a serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| R^k$ é converxente, e en consecuencia, a serie (16) converxe uniformemente.

Así pois podemos integrar término a término para obter:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Re} f(Re^{i\theta}) d\theta = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| R^k \int_0^{2\pi} \cos(k\theta + \theta_k) d\theta = 0,$$

pois como vimos na observación previa $\int_0^{2\pi} \cos(k\theta + \theta_k) d\theta = 0$.

Por outra parte, para $n \geq 1$ temos

$$\mathrm{Re} f(Re^{i\theta}) \cos(n\theta + \theta_n) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| R^k \cos(k\theta + \theta_k) \cos(n\theta + \theta_n),$$

e esta serie tamén é converxe uniformemente para $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e de novo:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re} f(Re^{i\theta}) \cos(n\theta + \theta_n) d\theta &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| R^k \int_0^{2\pi} \cos(k\theta + \theta_k) \cos(n\theta + \theta_n) d\theta \\ &= \pi |a_n| R^n, \end{aligned}$$

xa que na observación previa vimos que

$$\int_0^{2\pi} \cos(k\theta + \theta_k) \cos(n\theta + \theta_n) d\theta = \begin{cases} 0 \text{ se } k \neq n \\ \pi \text{ se } k = n \end{cases}$$

Do anterior e tendo en conta que $M \geq 0$ e $1 + \cos(n\theta + \theta_n) \geq 0$, séguese que:

$$\begin{aligned}
\pi|a_n|R^n &= \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}f(Re^{i\theta})\cos(n\theta+\theta_n)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}f(Re^{i\theta})\cos(n\theta+\theta_n)d\theta + \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}f(Re^{i\theta})d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}f(Re^{i\theta})\left[1+\cos(n\theta+\theta_n)\right]d\theta \\
&\leq M\int_0^{2\pi} \left[1+\cos(n\theta+\theta_n)\right]d\theta = 2\pi M.
\end{aligned}$$

Así que,

$$\pi|a_n|R^n \leq 2\pi M \Rightarrow |a_n| \leq \frac{2M}{R^n},$$

e a) está probado para o caso particular $s_0 = 0$ e $a_0 = f(0) = 0$.

No caso en que $s_0 \neq 0$ consideramos a función

$$F(s) = f(s - s_0) - f(s_0),$$

que é holomorfa nun nun aberto que contén o disco pechado $|s - s_0| \leq R$ e $F(0) = 0$. Como $\mathrm{Re}F(s) \leq M - \mathrm{Re}f(s_0)$ para $|s| = R$, o resultado se obtén aplicando a función $F(s)$ o xa demostrado, e así a) está probado.

Probaremos i) de b).

Para $|s - s_0| \leq r \leq R$, tense que:

$$\begin{aligned}
|f(s) - f(s_0)| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s-s_0)^n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||(s-s_0)|^n \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2\{M - \mathrm{Re}f(s_0)\}R^{-n}r^n = 2\{M - \mathrm{Re}f(s_0)\}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \\
&= 2\{M - \mathrm{Re}f(s_0)\}\frac{\frac{r}{R}}{1-\frac{r}{R}} = 2\{M - \mathrm{Re}f(s_0)\}\frac{r}{R-r}.
\end{aligned}$$

Para ii), dado que $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(s-s_0)^k$ é holomorfa no disco pechado $|s - s_0| \leq R$, indutivamente obtemos que

$$f^{(n)}(s) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k k(k-1)\cdots-(k-n+1)|s-s_0|^{k-n},$$

co cal

$$\begin{aligned}
|f^{(n)}(s)| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| k(k-1)\cdots(k-n+1)|s-s_0|^{k-n} \\
&\leq \sum_{k=n}^{\infty} 2\{M - \mathrm{Re} f(s_0)\} R^{-k} k(k-1)\cdots(k-n+1) r^{k-n} \\
&= 2\{M - \mathrm{Re} f(s_0)\} \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)\frac{r^{k-n}}{R^k} \\
&= 2\{M - \mathrm{Re} f(s_0)\} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{d^n}{dr^n}\left(\frac{r}{R}\right)^k \\
&= 2\{M - \mathrm{Re} f(s_0)\} \frac{d^n}{dr^n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k \\
&= 2\{M - \mathrm{Re} f(s_0)\} \frac{d^n}{dr^n} \left(\frac{R}{R-r}\right) \\
&= 2n!\{M - \mathrm{Re} f(s_0)\} \frac{R}{(R-r)^{n+1}},\ n \geq 1.
\end{aligned}$$

Falta xustificar o intercambio baixo a suma feita na antepenúltima igualdade, así como obter de forma indutiva a expresión da derivada empregada.

Para a primeira afirmación, fixado u tal que $r < u < R$ e considerando a función:

$$g : B(s_0, u) \longrightarrow \mathbb{C},\ g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s-s_0}{R}\right)^k.$$

Dado que

$$\left|\left(\frac{s-s_0}{R}\right)^k\right| = \frac{|s-s_0|^k}{R^k} < \frac{u^k}{R^k},$$

e como $u < R$ será $\left|\frac{u}{R}\right| < 1$ logo a serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{R^k}$ é converxente, e polo tanto o criterio M-Weierstrass garante a converxencia uniforme da serie $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s-s_0}{R}\right)^k$ sobre $B(s_0, u)$, e en particular sobre calquera compacto contido na mesma. Logo a función $g(s)$ é holomorfa en subconxuntos compactos de $B(s_0, u)$, e así

$$\frac{d^n}{ds^n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s-s_0}{R}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{s-s_0}{R}\right)^k,\ \text{en } B(s_0, t)$$

En particular, para $s = z + s_0$ con $z \in (0, u)$, tense que:

$$\frac{d^n}{dz^n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{R}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{z}{R}\right)^k.$$

Para a segunda, indutivamente probamos que $\dfrac{d^n}{dr^n}\left(\dfrac{R}{R-r}\right) = n!\dfrac{R}{(R-r)^{n+1}}$.

Se $n = 1$,

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{R}{R-r}\right) = R(R-r)^{-2}, \text{ é certo.}$$

Supoñamos $n > 1$ e que o resultado é certo para n, isto é, $\dfrac{d^n}{dr^n}\left(\dfrac{R}{R-r}\right) = n!\dfrac{R}{(R-r)^{n+1}}$, e vexamos que se verifica para $n+1$.

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+1}}{dr^{n+1}}\left(\frac{R}{R-r}\right) &= \frac{d}{dr}\left(n!\frac{R}{(R-r)^{n+1}}\right)\\ &= (n+1)!R(R-r)^{-(n+2)},\end{aligned}$$

e como por hipóteses de indución o resultado é certo para n, o buscado séguese do mostrado.

Polo tanto $b)$ está probado. □

Por último, antes de involucrarnos na proba do teorema de Hadamard, faremos unha breve observación sobre a derivada logarítmica.

Definición 2.17. Sexa $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aberto e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(s) \neq 0\ \forall s \in \Omega$. Entón a función $\dfrac{f'}{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$ e denomínase derivada logarítmica de f.

A observación é a seguinte:

Sexa $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aberto e $\{f_n\}$ unha sucesión de funcións en $\mathcal{H}(\Omega)$ de xeito que o produto

$$f(s) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(s)$$

converxe uniformemente sobre cada compacto de Ω e $f(s) \neq 0$ para todo $s \in \Omega$. Entón

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(s)}{f_n(s)} \quad \forall s \in \Omega,$$

e a serie converxe uniformemente sobre cada compacto de Ω.

Proba. Dado que $f(s) \neq 0\ \ \forall s \in \Omega$ será $f_n(s) \neq 0$ para todo $s \in \Omega$ e todo n. Denotaremos por

$$p_n(s) = f_1(s) \cdots f_n(s).$$

Por hipóteses $p_n(s) \rightrightarrows f(s)$ sobre cada compacto de Ω, e de aquí, en virtude do teorema 1.5, séguese que $p_n'(s) \rightrightarrows f'(s)$, tamén sobre cada compacto de Ω. En fin,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n'(s)}{p_n(s)} = \frac{f'(s)}{f(s)} \quad \forall s \in \Omega,$$

uniformemente sobre cada compacto de Ω. Pero

$$\frac{p_n'(s)}{p_n(s)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(s)}{f_k(s)},$$

daquela

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(s)}{f_k(s)},$$

$\square$

Con estes resultados estamos en condicións de abordar a demostración do teorema de factorización de Hadamard. Imos logo:

Teorema 2.18 (Factorización de Hadamard)**.** *Sexa $G(s)$ unha función enteira de orde finito α. Sexa s_n a sucesión formada por tódolos ceros de $G(s)$, escritos de acordo ca súa multiplicidade. Entón existe unha factorización de Weierstrass de $G(s)$ da forma:*

$$G(s) = s^k e^{g(s)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{s_n}\right) e^{\frac{s}{s_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{p}\left(\frac{s}{s_n}\right)^p},$$

onde $p = [\alpha]$ e a función $g(s)$ é un polinomio de grao $\leq p$.

Proba. Usando o lema 2.12, ó igual que o principio da demostración do corolario 2.15, podemos supoñer que $G(s) \neq 0$.

Sexa $p = [\alpha]$. Entón polo corolario 2.15 a serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|s_k|^{p+1}}$$

é converxente.

De aquí, e dado que por hipóteses $G(s)$ é unha función enteira, a expresión

$$G(s) = s^k e^{g(s)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{s_n}\right) e^{\frac{s}{s_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{p}\left(\frac{s}{s_n}\right)^p},$$

é consecuencia inmediata do teorema 2.8.

O que resta de proba consiste en ver que $g(s)$ é un polinomio de grao menor igual que p, e para elo bastará ver que $g^{(p+1)}(s) = 0 \ \forall\, s \in \mathbb{C}$.

Pola observación previa ó teorema, para a derivada logarítmica de $G(s)$ tense que:

$$\frac{G'(s)}{G(s)} = g'(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{s_n - s} + \frac{1}{s_n} + \frac{s}{s_n^2} + \cdots + \frac{s^{p-1}}{s_n^p}\right),$$

onde a serie converxe uniformemente sobre cada compacto de $\mathbb{C}$. Logo:

$$\frac{d^p}{ds^p}\frac{G'(s)}{G(s)} = g^{(p+1)}(s) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p!}{(s_n - s)^{p+1}} \tag{18}$$

Sexa $R > 0$ e consideremos a función $F_R : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$F_R(s) = G(s) \prod_{|s_n| \leq R} \left(1 - \frac{s}{s_n}\right)^{-1}, \ s \in \mathbb{C}.$$

Temos pois que F_R é unha función enteira que non ten ceros no círculo $\overline{B}(0, R)$, logo debe existir unha función H_R holomorfa nun círculo aberto que contén ó anterior, tal que

$$F_R(s) = e^{H_R(s)}$$

neste círculo máis grande, e en particular para todo s tal que $|s| \leq R$. Posto que

$$e^{H_R(0)} = F_R(0) = 1,$$

resulta que $H_R(0) = 2k\pi i$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Entón tomando $H_R - 2k\pi i$ en lugar de H_R, pódese supoñer $H_R(0) = 0$.

Calculando a derivada logarítmica de

$$e^{H_R(s)} = F_R(s) = G(s) \prod_{|s_n| \leq R} \left(1 - \frac{s}{s_n}\right)^{-1}$$

con s no círculo aberto que contén a $\overline{B}(0, R)$, obtemos:

$$H_R'(s) = \frac{F_R'(s)}{F_R(s)} = \frac{G'(s)}{G(s)} + \sum_{|s_n| \leq R} \frac{1}{s_n - s}.$$

Logo

$$H_R^{(p+1)}(s) = \frac{d^p}{ds^p}\frac{G'(s)}{G(s)} + \sum_{|s_n| \leq R} \frac{p!}{(s_n - s)^{p+1}},$$

e de (18) séguese que

$$g^{(p+1)}(s) = H_R^{(p+1)}(s) + \sum_{|s_n| > R} \frac{p!}{(s_n - s)^{p+1}}, \ R > 0, \ |s| \leq R.$$

Polo tanto probar que $g^{(p+1)} = 0$ é equivalente a probar as dúas seguintes:

1) $\lim_{R\to\infty} \sum_{|s_n| > R} \dfrac{p!}{|s_n - s|^{p+1}} = 0, \ \forall\, s \in \mathbb{C},$

2) $\lim_{R\to\infty}\left|H_R^{(p+1)}(s)\right| = 0,\ \forall\, s\in\mathbb{C}.$

Consideremos o círculo $|s|\leq \frac{R}{2}$. Para $|s_n|>R$ temos que

$$|s_n - s| = |s_n|\left|1-\frac{s}{s_n}\right| \geq |s_n|\left(1-\frac{\frac{R}{2}}{R}\right) = \frac{|s_n|}{2},$$

logo

$$\frac{1}{|s_n-s|}\leq\frac{2}{|s_n|},$$

co cal

$$\sum_{|s_n|>R}\frac{p!}{|s_n-s|^{p+1}}\leq 2^{(p+1)}p!\sum_{|s_n|>R}\frac{1}{|s_n|^{p+1}},$$

pero a serie $\sum_{|s_n|>R}\frac{1}{|s_n|^{p+1}}$ é converxente, (segundo anunciamos ó principio da demostración), e en consecuencia

$$\lim_{R\to\infty}\sum_{|s_n|>R}\frac{p!}{|s_n-s|^{p+1}} = 0 \quad \forall\, s.$$

e 1) está probado.

Vesamos agora que o outro límite tamén e 0. Se $|s|=2R$. e $|s_n|\leq R$, tense que $\frac{1}{|s_n|}\geq R$, logo

$$\left|1-\frac{s}{s_n}\right|\geq\left|\frac{s}{s_n}\right|-1\geq\frac{2R}{R}-1=1,$$

e así

$$\frac{1}{\left|1-\frac{s}{s_n}\right|}\leq 1,$$

co cal

$$|F_R(s)|\leq|G(s)| \quad \text{se} \quad |s|=2R.$$

Pero dende que $G(s)$ é unha función enteira de orde α, para $\varepsilon>0$ temos que

$$|F_R(s)|\leq e^{(2R)^{\alpha+\varepsilon}},\ |s|=2R,\ \forall\, R>0,$$

e dado que $F_R(s)$ é unha función enteira, polo principio do módulo máximo a última desigualdade se mantén no círculo $|s|\leq 2R$, é dicir

$$|F_R(s)|\leq e^{(2R)^{\alpha+\varepsilon}},\ |s|\leq 2R,$$

e en particular

$$|F_R(s)|\leq e^{(2R)^{\alpha+\varepsilon}},\ \text{se}\ |s|\leq R.$$

Polo tanto,

$$\text{Re}H_R(s) = \ln |F_R(s)| \leq (2R)^{\alpha+\varepsilon}, \text{ se } |s| \leq R,$$

e aplicando o apartado *ii*) de *b*) do lema 2.16 obtemos:

$$|H_R^{(p+1)}(s)| \leq \frac{2(p+1)!R}{(R-r)^{p+2}}(2R)^{\alpha+\varepsilon}, \text{ se } |s| = r < R,$$

en particular para $|s| = r = \frac{R}{2}$, o anterior se converte en

$$|H_R^{(p+1)}(s)| \leq \frac{2(p+1)!R}{\left(\dfrac{R}{2}\right)^{p+2}}(2R)^{\alpha+\varepsilon} \leq c(\epsilon)R^{\alpha+\varepsilon-(p+1)},$$

onde $c(\epsilon) = (p+1)!2^{\alpha+\epsilon+k+3}$ é unha constante que non depende de R. De novo polo principio do módulo máximo a anterior desigualdade se mantén no círculo $|s| \leq \frac{R}{2}$, isto é

$$|H_R^{(p+1)}(s)| \leq c(\epsilon)R^{\alpha+\varepsilon-(p+1)}, \text{ se } |s| \leq \frac{R}{2}.$$

Agora, dado que $\alpha < [\alpha] + 1 = p + 1$ para ε suficientemente pequeno resulta que $\alpha + \varepsilon < p + 1$, ou se se prefire, $\alpha + \varepsilon - (p + 1) < 0$, entón pasando a límites a última desigualdade cando $R \longrightarrow \infty$, concluímos

$$\lim_{R\longrightarrow\infty} |H_R^{(p+1)}(s)| = 0,$$

co cal 2) tamén está probado, e así $g^{(k+1)}(s) = 0$ como desexábamos ver.

$\square$

Exemplo:

O teorema de factorización de Hadamard pódese aplicar para obter de unha forma sinxela o produto infinito da función:

$$\operatorname{sen} s = s\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{s^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Vexamos que $f(s) = \operatorname{sen} s$ ten orde 1.

Para $s = \sigma + it$, usando a relación fundamental $\operatorname{sen} s = \operatorname{sen}\sigma\cosh t + i\cos\sigma\operatorname{senh} t$, resulta que

$$\begin{aligned}
|\operatorname{sen} s|^2 &= |\operatorname{sen}\sigma\cosh t + i\cos\sigma\operatorname{senh} t|^2\\
&= \operatorname{sen}^2\sigma\cosh^2 t + \cos^2\sigma\operatorname{senh}^2 t\\
&= \operatorname{sen}^2\sigma(1 + \operatorname{senh}^2 t) + \cos^2\sigma\operatorname{senh}^2 t\\
&= \operatorname{sen}^2\sigma + \operatorname{senh}^2 t\\
&\leq 1 + \operatorname{senh}^2 t = \cosh^2 t,
\end{aligned}$$

é dicir
$$|\operatorname{sen} s|^2 \leq \cosh^2 t \Rightarrow |\operatorname{sen} s| \leq |\cosh t|,$$
é dicir
$$|\operatorname{sen} s| \leq |\cosh t| = \left|\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right| \leq |e^t| = e^t = e^{\mathrm{Im} s} \leq e^{|s|},$$
de onde
$$\alpha = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln\ln e^r}{\ln r} = 1, \ (r = |s|)$$
que é a orde de $f(s)$.

Os ceros da función $\operatorname{sen} s$ veñen sendo $s_0 = 0$ e $s_n = \pm m\pi$ con $m = 1, 2, \dots$, e son ceros simples, e a serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|s_n|^2},$$
é converxente. De aquí polo teorema de factorización de Hadamard séguese:
$$\begin{aligned}\operatorname{sen} s &= e^{as+b} s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{s_n}\right) e^{\frac{s}{s_n}} \\ &= e^{as+b} s \left(1 - \frac{s}{\pi}\right) e^{\frac{s}{\pi}} \cdot \left(1 + \frac{s}{\pi}\right) e^{-\frac{s}{\pi}} \cdot \left(1 - \frac{s}{2\pi}\right) e^{\frac{s}{2\pi}} \cdots \\ &= e^{as+b} s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2\pi^2}\right).\end{aligned}$$
Como o seno é unha función impar,
$$\operatorname{sen}(-s) = -e^{-as+b} s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2\pi^2}\right) = -e^{as+b} s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2\pi^2}\right) = -\operatorname{sen} s,$$
de onde
$$-e^{-as+b} s = -e^{as+b} s \Leftrightarrow e^{-as} e^b = e^{as} e^b \Rightarrow e^{2as} = 1,$$
co cal $a = 0$, e así temos
$$\operatorname{sen} s = e^b s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2\pi^2}\right),$$
ou se se prefire
$$\frac{\operatorname{sen} s}{s} = e^b \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2\pi^2}\right).$$
Sen embargo $\lim_{s\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} s}{s} = 1$, logo debe ser $b = 0$, que finalmente
$$\operatorname{sen} s = s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Reseña matemática: *Jackes Hadamard (1865-1963). Foi un matemático francés. Entre os seus logros máis relevantes cabe destacar a proba do teorema do número primo, establecida tamén de forma independente polo matemático belga Charles-Jean de la Vallée Poussin. Tamén estableceu a noción de problema ben plantado no campo das ecuacións diferencias, colaborou no establecemento das bases do cálculo infinitesimal e desenrolou o teorema sobre o valor absoluto dun determinante. Aparte dos seus logros matemáticos, tamén se interesou polos procesos mentais que levan aos científicos a facer os seus descubrimentos, como quedou plasmado na súa obra "Ensaio sobre la psicoloxía da invención no campo das matemáticas". Como anécdota, cóntase que un día mentres paseaba co seu pai polas veciñanzas da École Normale, tiveron a seguinte conversación:*
- ¿É aquí onde se aprende matemáticas?
- Sí, na École Normale, no departamento de ciencias.
- Daquela eu non virei.
En 1884 fixo as probas para ingresar na École Polytechnique e na École Normale Supérieure, onde obtivo o número un para acceder a ambas. Cabe mencionar que as prazas eran limitadas, 45 concretamente, e había máis de 1000 candidatos. Entre dúbidas de que praza tomar, ó final apoiándose no seu amigo Charles Émile Picard, decidiu converterse nun normalian.
A investigación de Hadamard foi altamente recoñecida. En 1898 unha comisión formada por Hermite, Poincaré, Bertrand e Sarrau lle conceden o Premio de Poncelet polo seu traballo nos últimos dez anos. Foi nomeado doutor honoris causa pola Universidade de Gotinga. Esta é a universidade de Gauus, Dirichlet, Riemann e Hilbert. Este último incluíu o nome de Hadamard nunha corta lista dos matemáticos franceses e alemáns mellores da época.
A desgracia asolou a súa porta durante o período da primeira guerra mundial, onde os seus dous fillos, Pierre e Étienne, perderon a vida no fronte. Esta traxedia marcou a súa vida. Chegou a comentar que nos anos comprendidos entre 1893 e 1916 transcorreron os mellores anos da súa vida. Durante a segunda guerra mundial, viuse obrigado a emigrar, consecuencia do acoso nazi, pois Hadamard era de descendencia xudía. Durante este período pasou diverso tempo en varias universidades, como a de Harvard. En 1945 regresou a Europa, invitado pola London Mathematical Society. Hadamard ganouse o sobrenome de lenda viva das matemáticas. As universidades máis prestixiosas invitábano os seus congresos constantemente.
Morreu o 17 de outubro de 1963 despois de ver como era distinguido cos máis altos galardóns de innumerables universidades, gobernos e institucións, pero sobre todo co recoñecemento da comunidade matemática mundial. Foi este último feito o único polo que a súa investigación matemática se viu interrompida, pero a súa obra segue patente nos nosos días.

Capítulo 3

A función Gamma de Euler

3.1. Definición e primeiras propiedades.

A función gamma de Euler defínese como

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}},$$

onde γ é a constante de Euler.

A mención do visto no tema anterior, a función $\Gamma^{-1}(s)$ é enteira de orde polo menos un. Ademais, $\Gamma(s)$ é analítica en $\mathbb{C}$ excepto nos puntos $s = 0, -1, -2, \dots, -n, \dots$, onde presenta polos simples.

Teorema 3.1 (A fórmula de Euler)**.** *Para* $s \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$ *verifícase:*

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} \tag{1}$$

Proba. Das definicións de produto infinito e a función $\Gamma(s)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(s)} &= se^{\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}}\\
&= s\lim_{m\to\infty} e^{s\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}-\ln m\right)}\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}}\\
&= s\lim_{m\to\infty} e^{s\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}-\ln m\right)}e^{s\left(-\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\right)}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)\\
&= s\lim_{m\to\infty} e^{-s\ln m}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)\\
&= s\lim_{m\to\infty} m^{-s}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)\\
&= s\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)\\
&= s\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s}\left(1+\frac{s}{n}\right)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{s}\\
&= s\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s}\left(1+\frac{s}{n}\right),
\end{aligned}$$

de onde obtemos a expresión (1) :

$$\Gamma(s)=\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}$$

□

Corolario 3.2 (A fórmula de Gauss)**.** *Para* $s\in\mathbb{C}-\{0,-1,-2,...\}$ *verifícase:*

$$\Gamma(s)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot n^{s}}{s(s+1)\cdots(s+n)}.$$

Proba.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(s)} &= s\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^{s}}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)=s\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^{s}}\prod_{n=1}^{m}\left(\frac{n+s}{n}\right)\\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{s}{m^{s}}\cdot\frac{(s+1)}{1}\cdot\frac{(s+2)}{2}\cdots\frac{(s+m)}{m}\\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+m)}{m!m^{s}},
\end{aligned}$$

logo

$$\Gamma(s) = \lim_{m\to\infty} \frac{m! \cdot m^s}{s(s+1)\cdots(s+m)}.$$

□

Corolario 3.3.

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$$

Proba. Polo corolario 3.2 temos que

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n}{1\cdot 2\cdots(n+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,\end{aligned}$$

e tamén

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^2}{2\cdot 3\cdots n(n+1)(n+2)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2+n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!n^2}{(n+1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2}{2+n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.\end{aligned}$$

Logo

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$$

□

Teorema 3.4 (Ecuación funcional)**.** *Para* $s \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$ *verifícase:*

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Proba. Da fórmula de Euler (1) obtemos,

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)} &= \frac{s}{s+1}\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s+1}\left(1+\frac{s+1}{n}\right)^{-1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}}\\
&= \frac{s}{s+1}\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\frac{\frac{(n+1)^{s+1}}{n^{s+1}}\cdot\frac{n}{n+s+1}}{\frac{(n+1)^{s}}{n^{s}}\cdot\frac{n}{n+s}}\\
&= \frac{s}{s+1}\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+s}{n+s+1}\\
&= \frac{s}{s+1}\lim_{m\to\infty}\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{1+s}{s+2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2+s}{s+3}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{3+s}{s+4}\right)\cdots\left(\frac{m+1}{m}\cdot\frac{m+s}{s+m+1}\right)\\
&= \frac{s}{s+1}\lim_{m\to\infty}\frac{(1+s)(m+1)}{s+m+1}\\
&= \frac{s}{s+1}\lim_{m\to\infty}\frac{(1+s)m+(1+s)}{s+m+1}\\
&= \frac{s}{s+1}(1+s)\\
&= s.
\end{aligned}$$

Así que

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s).$$

□

Corolario 3.5. *Para cada número natural,*

$$\Gamma(n+1)=n!.$$

Proba. Dado que para todo $s\in\mathbb{C}-\{0,-1,-2,\dots\}$ se cumpre que $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$, en particular para $n\in\mathbb{N}-\{0\}$, será

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)\\
&= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)\\
&\vdots\\
&= n(n-1)(n-2)\cdots 2\Gamma(1)\\
&= n!,
\end{aligned}$$

pois $\Gamma(1)=1$.

Para $n=0$, defínese $0!=\Gamma(1)=1$. □

Corolario 3.6 (Fórmula de duplicación)**.** *Para cada número natural,*

$$\Gamma(2n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

Proba. Primeiramente imos ver que $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)\\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{5}{2}\right)\\
&\vdots\\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\cdots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2^n}(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{(2n-1)!!}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{\frac{(2n)!}{2^n n!}}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),
\end{aligned}$$

onde usamos a identidade $(2n-1)!!=\frac{(2n-1)!}{(2n-2)!!}=\frac{(2n)!}{2^n n!}$.

Por outra banda

$$\begin{aligned}
\Gamma(2n) &= \Gamma(2n-1+1)=(2n-1)!\\
&= (2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots n\Gamma(n).
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2n)} &= \frac{\Gamma(n)\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots n\Gamma(n)}\\
&= \frac{\Gamma(n)2n(2n-1)(2n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{2n}n!(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots n\Gamma(n)}\\
&= \frac{2}{2^{2n}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

En fin,

$$\frac{\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2n)}=\frac{2}{2^{2n}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\Gamma(2n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

$\square$

Teorema 3.7 (Fórmula de complemento). *Para cada número s non enteiro,*

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi s}.$$

Proba. No exemplo do teorema de factorización de Hadamard vimos que

$$\operatorname{sen} s = s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2\pi^2}\right),$$

e dado que a función $\operatorname{sen} s$ é enteira, por prolongación analítica, non hai ambigüidade en intercambiar $s \mapsto \pi s$. Deste xeito

$$\operatorname{sen} \pi s = \pi s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right),$$

ou se se prefire

$$\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right)} = \frac{\pi s}{\operatorname{sen} \pi s}.$$

Doutra banda, a fórmula de Euler vista no teorema 3.1 permítenos escribir

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)\Gamma(-s) &= \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s} \left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\right] \frac{1}{-s} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s} \left(1-\frac{s}{n}\right)^{-1}\right] \\
&= \frac{1}{-s^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right)} \\
&= \frac{-\pi}{s \operatorname{sen} \pi s}.
\end{aligned}$$

E da ecuación funcional vista no teorema 3.4 deducimos

$$-s\Gamma(-s) = \Gamma(1-s) \Rightarrow \Gamma(-s) = \frac{\Gamma(1-s)}{-s}.$$

Así que

$$\Gamma(s)\Gamma(-s) = \Gamma(s)\frac{\Gamma(1-s)}{-s} = \frac{-\pi}{s \operatorname{sen} \pi s} \Rightarrow \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi s}$$

$\square$

Corolario 3.8.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Proba. Tense que
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right),$$
e polo teorema anterior,
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}},$$
de onde,
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi.$$

Agora, da fórmula de Gauss
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n!n^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n\right)} \geq 0,$$
logo debe ser
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$
□

3.2. Representación integral.

Teorema 3.9 (A fórmula integral). *Para Res > 0,*
$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-u}u^{s-1}du.$$

Proba. Para Re $\geq \sigma_0 > 0$, imos ver que a integral do lado dereito converxe uniformemente, e polo tanto, representa a unha función analítica no semiplano Re > 0.

Sexa $\Omega := \{s \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}s \geq \sigma_0 > 0\}$. Vexamos en primeiro lugar que a integral define unha función holomorfa sobre Ω. Polo teorema 1.10, (e o seu homólogo para integrais de segunda especie), é suficiente probar que cada unha das seguintes integrais
$$\int_0^1 e^{-u}u^{s-1}du, \quad \int_1^\infty e^{-u}u^{s-1}du,$$
converxen uniformemente sobre cada compacto de Ω.

Sexa pois $K \subset \Omega$ un compacto.

Como K é compacto existen $a, A \in \mathbb{R}$ tales que
$$0 < a < \mathrm{Re}s < A, \ \forall\, s \in K.$$

Se $u \geq 1$ e $s \in K$, temos que:

$$|u^{s-1}| = |u^{\sigma+it}u^{-1}| = |u^{\sigma+it}||u^{-1}| = u^{\sigma-1} \leq u^{A-1},$$
$$\lim_{u\to\infty} u^{A-1}e^{-\frac{1}{2}u} = 0 \Rightarrow \exists\, c > 0 \quad \text{tal que} \quad u^{A-1}e^{-\frac{1}{2}u} \leq c,\ \forall\, u \geq 1.$$

Destas dúas concluímos

$$\begin{aligned}|e^{-u}u^{s-1}| = e^{-u}|u^{s-1}| &\leq e^{-u}u^{A-1}\\ &= e^{-\frac{1}{2}u}e^{-\frac{1}{2}u}u^{A-1}\\ &\leq ce^{-\frac{1}{2}u}.\end{aligned}$$

Agora dado que a función $\phi : [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi(u) = ce^{-\frac{1}{2}u}$ verifica:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty ce^{-\frac{1}{2}u}du &= \lim_{x\to\infty}\int_1^x ce^{-\frac{1}{2}u}du\\ &= -2c\lim_{x\to\infty}\int_1^x -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}u}du = -2c\lim_{x\to\infty}\left[e^{-\frac{1}{2}u}\right]_1^x\\ &= -2c\lim_{x\to\infty}\left[e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{2c}{e^{\frac{1}{2}}} < \infty,\end{aligned}$$

resulta que a integral $\int_1^\infty e^{-u}u^{s-1}du$, en virtude do teorema 1.9, é uniformemente converxente sobre cada compacto K.

Se $0 < u \leq 1$ e $s \in K$, temos que:

$$(\mathrm{Re}s - 1)\ln u \leq (a-1)\ln u \Rightarrow \ln u^{\mathrm{Re}s-1} \leq \ln u^{a-1} \Rightarrow u^{\mathrm{Re}s-1} \leq u^{a-1},$$

logo

$$|e^{-u}u^{s-1}| \leq |u^{s-1}| = u^{\mathrm{Re}s-1} \leq u^{a-1},$$

e como

$$\begin{aligned}\int_0^1 u^{a-1}du &= \frac{1}{a}\lim_{x\to1}\int_0^x au^{a-1}du = \frac{1}{a}\lim_{x\to1}[u^a]_0^x\\ &= \frac{1}{a} < \infty,\end{aligned}$$

concluímos polo análogo para integrais de segunda especie do teorema 1.9, que a integral $\int_0^1 e^{-u}u^{s-1}du$ é uniformemente converxente sobre K.

En consecuencia, a función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $s \mapsto \int_0^\infty e^{-u}u^{s-1}du$ é holomorfa, e polo tanto analítica en Ω, que era o pretendíamos ver.

Agora, dado que a función $\Gamma(s)$ tamén e analítica en Ω, para probar que ambas funcións coinciden en Ω, polo principio de identidade para funcións holomorfas, será suficiente probar que coincide en $[1,\infty)$, isto é,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-u}u^{x-1}du\ \forall\, x \in [1,\infty).$$

Integrando $n-$veces por partes obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^{x-1}du &= \left[\left(1-\frac{u}{n}\right)\frac{u^x}{x}\right]_0^n + \frac{1}{x}\int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^{n-1} u^x du \\
&= \frac{1}{x}\int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^{n-1} u^x du \\
&= \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}\cdot\frac{n-1}{n}\int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^{n-2} u^{x+1}du \\
&\vdots \\
&= \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}\cdots\frac{1}{x+n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{1}{n}\int_0^n u^{x+n-1}du \\
&= \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}\cdots\frac{1}{x+n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x+n}\left[u^{x+n}\right]_0^n \\
&= \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}\cdots\frac{1}{x+n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{1}{n}\cdot\frac{n^{x+n}}{x+n} \\
&= \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}\cdots\frac{1}{x+n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\cdot\frac{n^x\cdot n\cdot n^{n-1}}{x+n} \\
&= \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.
\end{aligned}$$

É dicir,

$$\int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right) u^{x-1}du = \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

e tendo presente a fórmula de Gauss vista no corolario 3.2, resulta

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right) u^{x-1}du &= \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \\
&= \Gamma(x)
\end{aligned}$$

Para rematar, vexamos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right) u^{x-1}du = \int_0^\infty e^{-u}u^{x-1}du,\ \forall\, x\geq 1.$$

Afirmamos que para $0\leq u\leq n$ a seguinte desigualdade verifícase:

$$0\leq e^{-u}-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n\leq e^{-u}\cdot\frac{u^2}{n} \tag{2}$$

En efecto, se $u=n$ o resultado é obvio. Supoñamos pois $0\leq u<n$. Tendo en conta as seguintes desigualdades fundamentais:

a) $-y\geq \ln(1-y)$, se $0\leq y<1$,

b) $y \geq \ln(1+y)$, se $0 \leq y < 1$,

c) $(1+y)^n \geq 1 - ny$, se $0 \leq y < 1$, $n \geq 1$.

De $0 \leq u < n$ será $0 \leq \frac{u}{n} < 1$, logo de $a)$ e $b)$ deducimos respectivamente:

$$e^{-\frac{u}{n}} \geq e^{\ln\left(1-\frac{u}{n}\right)} = 1 - \frac{u}{n} \Rightarrow e^{-u} \geq \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \tag{3}$$

$$e^{\frac{u}{n}} \geq e^{\ln\left(1+\frac{u}{n}\right)} = 1 + \frac{u}{n} \Rightarrow e^{u} \geq \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \tag{4}$$

E de (3) e (4) séguese que

$$\begin{aligned}
0 \leq e^{-u} - \left(1-\frac{u}{n}\right)^n &= e^{-u}\left[1 - e^u\left(1-\frac{u}{n}\right)^n\right] \\
&\leq e^{-u}\left[1 - \left(1+\frac{u}{n}\right)^n\left(1-\frac{u}{n}\right)^n\right] \\
&= e^{-u}\left[1 - \left(1-\frac{u^2}{n^2}\right)^n\right] \\
&\leq e^{-u}\left[1 - \left(1-\frac{u^2}{n}\right)^n\right] \\
&= e^{-u}\frac{u^2}{n}.
\end{aligned}$$

Co cal a afirmación (2) é certa.
Entón se $0 < u \leq n$ e $x \in [1, \infty)$, temos que:

$$0 \leq \left[e^{-u} - \left(1-\frac{u}{n}\right)^n\right] u^{x-1} \leq e^{-u}\frac{u^{x+1}}{n},$$

e así

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_0^n \left[e^{-u} - \left(1-\frac{u}{n}\right)^n\right] u^{x-1} du &\leq \int_0^n e^{-u}\frac{u^{x+1}}{n} du \\
&\leq \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-u} u^{x+1} du \to 0, \text{ cando } n \to \infty,
\end{aligned}$$

pois a última integral converxe, acorde ó visto con anterioridade.
Consecuentemente

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left[e^{-u} - \left(1-\frac{u}{n}\right)^n\right] u^{x-1} du \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-u}u^{x-1}du - \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^{x-1} du \\
&= \int_0^\infty e^{-u}u^{x-1}du - \Gamma(x),
\end{aligned}$$

é dicir,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-u} u^{x-1} du.$$

□

Corolario 3.10.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

Proba. Por ser o integrando unha función par,

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \int_0^\infty e^{-u^2} du,$$

que considerando o cambio de variable $t = u^2 \Rightarrow u = \sqrt{t} \Rightarrow du = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt$, resulta

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-u^2} du &= \int_0^\infty e^{-t}\frac{1}{2\sqrt{t}}dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt \\ &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},\end{aligned}$$

logo

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

□

3.3. A fórmula de Stirling

A importancia da fórmula de Stirling radica en que describe o comportamento de $\Gamma(s)$ cando $|s| \longrightarrow \infty$.

A continuación imos definir a función $\ln\Gamma(s)$. Para cada $s \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ consideremos a función dada por

$$\phi(s) := -\ln s - \gamma s - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{s}{n}\right) - \frac{s}{n}\right],$$

onde ln se refire o logaritmo principal,

$$\ln s = \ln|s| + i\mathrm{Arg}(s),$$

sendo $\mathrm{Arg}(s)$ o argumento principal definido en $[-\pi, \pi)$.

Referíndonos ó logaritmo principal, a función $\ln : \mathbb{C} - (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa. Imos ver que $\phi(s)$ é holomorfa en $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ e para isto bastará ver que a serie do lado dereito converxe uniformemente sobre cada compacto do mencionado dominio.

Sexa pois $|s| \leq R$ con $R > 0$. Para $n > R$, temos que

$$\left|\frac{s}{n}\right| = \frac{|s|}{n} \leq \frac{R}{n} < 1,$$

o que nos permite expresar a función logaritmo como serie de potencias da forma

$$\ln\left(1 + \frac{s}{n}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{s}{n}\right)^k,$$

co cal

$$\ln\left(1 + \frac{s}{n}\right) - \frac{s}{n} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{s}{n}\right)^k.$$

Acoutando agora modularmente obtemos:

$$\begin{aligned}
\left|\ln\left(1 + \frac{s}{n}\right) - \frac{s}{n}\right| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left|\frac{s}{n}\right|^k \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{R}{n}\right)^k \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{s}{n}^{k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{R^2}{n^2}}{1 - \frac{R}{n}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{n(n-R)}, \text{ se } n > R.
\end{aligned}$$

Para finalizar, tomando $n \geq 2R > R$, será $\frac{2R}{n} \leq 1$. Entón:

$$\left|\ln\left(1 + \frac{s}{n}\right) - \frac{s}{n}\right| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{R^2}{n^2}}{1 - \frac{R}{n}} = \frac{\frac{R^2}{n^2}}{2 - \frac{2R}{n}} \leq \frac{R^2}{n^2},$$

e dado que

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+1}{(n+1)^2}\right) = 2 > 1,$$

o criterio de Raabe conclúe que a serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^2}{n^2}$ é converxente, e en consecuencia o criterio M-Weierstrass garante a converxencia uniforme da serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{s}{n}\right) - \frac{s}{n}\right],$$

así que $\phi(s)$ é holomorfa en $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$, como queríamos ver.

Notemos ademais que

$$e^{\phi(s)} = \frac{1}{se^{\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}}} = \Gamma(s),$$

para calquera $s \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]$.

En particular, para $s > 0$ real, $\Gamma(s)$ é real maior que cero, e entón ten sentido considerar o logaritmo ordinario $\ln\Gamma(s)$. Notemos que neste caso tamén $\phi(s)$ é real, e de

$$e^{\phi(s)} = \Gamma(s) = e^{\ln\Gamma(s)},$$

deducimos que

$$\phi(s) = \ln\Gamma(s) \ \ \forall\, s > 0.$$

Por esta razón se usa a notación

$$\ln\Gamma(s) := -\ln s - \gamma s - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{s}{n}\right) - \frac{s}{n}\right],$$

para calquera $s \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]$. A función $\ln\Gamma(s)$ é pois holomorfa en dito dominio, e coincide co logaritmo ordinario en $(0, \infty)$.

O resultado fundamental desta sección é, como cabería esperar, o seguinte teorema:

Teorema 3.11 (A fórmula de Stirling)**.** *Para* $s \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ *tense que*

$$\ln\Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right)\ln s - s + \ln\sqrt{2\pi} - \int_0^{\infty}\frac{\rho_1(u)}{s+u}du,$$

onde $\rho_1(u) = \{u\} - \frac{1}{2}$.

Proba. Supoñamos polo momento que $s > 0$ é real e apliquemos a fórmula de sumación de Euler a función $f(u) = \ln(s+u)$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} f(k) &= \sum_{k=0}^{n}\ln(s+k) = \ln\prod_{k=0}^{n}(s+k) \\ &= \int_0^n \ln(s+u)du + \frac{1}{2}(\ln(s+n) + \ln s) + \int_0^n \frac{\rho_1(u)}{s+u}du.\end{aligned}$$

Dado que $\int \ln x dx = x\ln x - x$, aplicando o mesmo argumento de integración por partes a primeira integral da anterior igualdade resulta:

$$\begin{aligned}\int_0^n \ln(s+u)du &= [(s+u)\ln(s+u) - (s+u)]_0^n = (s+n)\ln(s+n) - (s+n) - s\ln s + s \\ &= (s+n)\ln(s+n) - n - s\ln s,\end{aligned}$$

que substituíndo

$$\ln \prod_{k=0}^{n}(s+k) = (s+n)\ln(s+n) - n - s\ln s + \frac{1}{2}\ln(s+n) + \frac{1}{2}\ln s + \int_0^n \frac{\rho_1(u)}{s+u}du \tag{5}$$

En particular para $s = 1$:

$$\ln \prod_{k=0}^{n}(1+k) = (1+n)\ln(1+n) - n + \frac{1}{2}(1+n) + \int_0^n \frac{\rho_1(u)}{1+u}du \tag{6}$$

Restando (6) a (5), para o lado esquerdo da igualdade obtemos:

$$\begin{aligned}\ln \prod_{k=0}^{n}(s+k) - \ln \prod_{k=0}^{n}(1+k) &= \ln\left(\frac{\prod_{k=0}^{n}(s+k)}{\prod_{k=0}^{n}(1+k)}\right) \\ &= \ln \frac{s(s+1)\cdots(s+n)}{n!(n+1)},\end{aligned}$$

e así

$$\begin{aligned}\ln \frac{s(s+1)\cdots(s+n)}{n!(n+1)} &= s\ln(s+n) + n\ln(s+n) - s\ln s + \frac{1}{2}(s+n) + \frac{1}{2}\ln s - \ln(1+n) - \\ &- n\ln(1+n) - \frac{1}{2}(1+n) + \int_0^n \frac{\rho_1(u)}{s+u}du - \int_0^n \frac{\rho_1(u)}{1+u}du \end{aligned} \tag{7}$$

Tendo en conta as dúas seguintes identidades,

$$s\ln(s+n) = s\ln\left(n\left(1+\frac{s}{n}\right)\right) = \ln n^s + s\ln\left(1+\frac{s}{n}\right)$$

e

$$\ln(1+n) = \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

usadas convenientemente, (7) convértese en:

$$\begin{aligned}\ln \frac{s(s+1)\cdots(s+n)}{n!(n+1)} &= \ln n^s + s\ln\left(1+\frac{s}{n}\right) + n\ln n + n\ln\left(1+\frac{s}{n}\right) - s\ln s + \frac{1}{2}\ln n + \\ &+ \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{s}{n}\right) + \frac{1}{2}\ln s - \ln n - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\ln n - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \\ &- \frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \int_0^n \frac{\rho_1(u)}{s+u}du - \int_0^n \frac{\rho_1(u)}{1+u}du,\end{aligned} \tag{8}$$

pero

$$\begin{aligned}\ln \frac{s(s+1)\cdots(s+n)}{n!(n+1)} &= \ln \frac{s(s+1)\cdots(s+n)}{n!} - \ln(n+1) \\ &= \ln \frac{s(s+1)\cdots(s+n)}{n!} - \ln n - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

que pasando $\ln n^s$ en (8) ó lado esquerdo e operando, obtemos

$$\ln \frac{s(s+1)\cdots(s+n)}{n!n^s} = s\ln\left(1+\frac{s}{n}\right) + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{s}{n}\right) - \left(s-\frac{1}{2}\right)\ln s - \\ - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \int_0^n \frac{\rho_1(u)}{s+u}du - \int_0^n \frac{\rho_1(u)}{1+u}du$$

Pasando límites á anterior igualdade cando $n \longrightarrow \infty$, para o lado esquerdo tendo presente a fórmula de Gauss que vimos no corolario 3.2, é sinxelo ver que se converte en $\ln \frac{1}{\Gamma(s)}$. Para o dereito, temos que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{s}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{s}{n}\right)^n + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{s}{n}\right) \\ = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{s}}\right)^{\frac{n}{s}}\right)^s = \ln e^s = s,$$

e de xeito similar,

$$\lim_{n\to\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Polo tanto,

$$\ln\frac{1}{\Gamma(s)} = s - \left(s-\frac{1}{2}\right)\ln s - 1 + \int_0^\infty \frac{\rho_1(u)}{s+u}du - \int_0^\infty \frac{\rho_1(u)}{1+u}du,$$

ou equivalentemente,

$$\ln\Gamma(s) = \left(s-\frac{1}{2}\right)\ln s - s + 1 + \int_0^\infty \frac{\rho_1(u)}{1+u}du - \int_0^\infty \frac{\rho_1(u)}{s+u}du \tag{9}$$

Esta última igualdade é certa para todo $s \in (0,\infty)$. No lema seguinte 3.12 probaremos que a función:

$$\mathbb{C} - (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{C}, \ \ s \mapsto \int_0^\infty \frac{\rho_1(u)}{s+u}du,$$

é holomorfa, e polo tanto todas as expresións do lado dereito de (9) serían holomorfas no aberto conexo $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$. Polo principio de identidade de funcións analíticas teríamos que a igualdade é válida para calquera $s \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]$.

Para rematar esta demostración vexamos que:

$$1 + \int_0^\infty \frac{\rho_1(u)}{1+u}du = \ln\sqrt{\pi}.$$

Da ecuación funcional vista no teorema 3.4 deducimos, como xa vimos, que

$$\Gamma(1-s) = -s\Gamma(-s), \ \ \forall\, s \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}.$$

Tamén a fórmula do complemento vista no teorema 3.7 permítenos escribir:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi s},\quad \forall\, s\in\mathbb{C}-\{0,-1,-2,\dots,-n,\dots\}$$

Entón

$$\Gamma(s)\Gamma(-s)=\frac{-\pi}{s\operatorname{sen}\pi s},\quad \forall s\in\mathbb{C}-\mathbb{Z}.$$

Ademais, das propiedades elementais de conxugados de números complexos, da fórmula de Gauss vista no corolario 3.2 concluímos que $\Gamma(\overline{s})=\overline{\Gamma(s)}$, e así

$$|\Gamma(s)|=\sqrt{\Gamma(s)\overline{\Gamma(s)}}=\sqrt{\Gamma(s)\Gamma(\overline{s})}.$$

Logo para $t\in\mathbb{R}$, con $t>0$ temos:

$$\begin{aligned}|\Gamma(it)|&=\sqrt{\Gamma(it)\Gamma(-it)}=\sqrt{\frac{-\pi}{it\operatorname{sen} i\pi t}}\\&=\sqrt{\frac{-\pi}{it\frac{1}{2i}(e^{-\pi t}-e^{\pi t})}}=\sqrt{\frac{2\pi}{t(e^{\pi t}-e^{-\pi t})}},\end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$\ln\sqrt{\frac{2\pi}{t(e^{\pi t}-e^{-\pi t})}}=\ln|\Gamma(it)|=\mathrm{Re}\Gamma(it).$$

Tomando en (9) $s=it$ e tendo presente esta última igualdade, resulta:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\Gamma(it)&=\mathrm{Re}\left[\left(it-\frac{1}{2}\right)\ln(it)-it-\int_0^\infty\frac{\rho_1(u)}{it+t}du\right]+1+\int_0^\infty\frac{\rho_1(u)}{1+u}du\\&=-\frac{1}{2}\ln t-\frac{\pi t}{2}-\mathrm{Re}\int_0^\infty\frac{\rho_1(u)}{it+u}du+1+\int_0^\infty\frac{\rho_1(u)}{1+u}du.\end{aligned}$$

No lema 3.13 posterior veremos que:

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^\infty\frac{\rho_1(u)}{it+u}du=0.$$

Entón despexando $1+\int_0^\infty\frac{\rho_1(u)}{1+u}du$ na igualdade previa e pasando a límites cando $t\longrightarrow\infty$,

$$\begin{aligned}1+\int_0^\infty\frac{\rho_1(u)}{1+u}du&=\lim_{t\to\infty}\left[\ln\sqrt{\frac{2\pi}{t(e^{\pi t}-e^{-\pi t})}}+\frac{1}{2}\ln t+\frac{\pi t}{2}\right]\\&=\lim_{t\to\infty}\left[\ln\sqrt{\frac{2\pi}{t(e^{\pi t}-e^{-\pi t})}}+\ln\sqrt{t}+\ln e^{\frac{\pi t}{2}}\right]\\&=\lim_{t\to\infty}\ln\sqrt{\frac{2\pi te^{\pi t}}{t(e^{\pi t}-e^{-\pi t})}},\end{aligned}$$

pero

$$\lim_{t\to\infty} \ln\sqrt{\frac{2\pi t e^{\pi t}}{t(e^{\pi t}-e^{-\pi t})}} = \lim_{t\to\infty} \ln\sqrt{\frac{2\pi e^{\pi t}}{e^{\pi t}(1-e^{-2\pi t})}}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \ln\sqrt{\frac{2\pi}{(1-e^{-2\pi t})}} = \ln\sqrt{2\pi},$$

co cal

$$1+\int_0^\infty \frac{\rho_1(u)}{1+u}du = \ln\sqrt{2\pi}.$$

A continuación probaremos os lemas que quedan par rematar a demostración. □

Lema 3.12. *Sexa $\rho_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a función tal que $\rho_2(u) = \frac{1}{2}(u^2-u)$ para $0 \leq u \leq 1$ e estendida a $\mathbb{R}$ de modo que sexa periódica de período 1. Verifícase que:*

$$\mathbb{C}-(\infty,0] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad s \longrightarrow \int_0^\infty \frac{\rho_2(u)}{(s+u)^2}du,$$

é unha función holomorfa, e súa derivada é:

$$\mathbb{C}-(\infty,0] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad s \longrightarrow -2\int_0^\infty \frac{\rho_2(u)}{(s+u)^3}du.$$

Ademais:

$$\int_0^\infty \frac{\rho_2(u)}{(s+u)^2}du = \int_0^\infty \frac{\rho_1(u)}{s+u}du \quad \forall\, s \in \mathbb{C}-(\infty,0].$$

Proba. Nótese que $\rho_2 : u \in [0,\infty) \longmapsto \rho_2(u) = \rho_2(u-[u]) \in \mathbb{R}$.

Entón $\rho_2(n) = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, ρ_2 é acoutada, e $\rho_2'(u) = \rho_1(u)\ \forall\, u \in (n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Vexamos que a función indicada é holomorfa.

A función:

$$s \in \mathbb{C}-(-\infty,0] \mapsto \frac{\rho_2(u)}{(s+u)^2} \in \mathbb{C},$$

é holomorfa. Polo teorema 1.10 será suficiente probar que a integral $\int_0^\infty \frac{\rho_2(u)}{(s+u)^2}du$ converxe uniformemente sobre cada compacto K de $\mathbb{C}-(-\infty,0]$.

Sexa K un compacto. Entón existe $M > 0$ tal que $|s| \leq M$ para todo $s \in K$. Abonda con probar que converxe uniformemente sobre K a integral $\int_{M+1}^\infty \dfrac{\rho_2(u)}{(s+u)^2}du$. Dado que que a función $\rho_2(u)$ é acoutada existirá $c > 0$ tal que $|\rho_2(u)| \leq c$ calquera que sexa u. Entón para $u \geq M+1$ e $s \in K$ temos que:

$$|s+u| \geq |u|-|s| = u-|s| \geq u-M > 0,$$

co cal

$$|s+u|^2 \geq (u-M)^2,$$

é dicir

$$\frac{1}{|s+u|^2} \leq \frac{1}{(u-M)^2},$$

e así

$$\left|\frac{\rho_2(u)}{(s+u)^2}\right| = \frac{|\rho_2(u)|}{|s+u|^2} \leq \frac{c}{(u-M)^2}.$$

Pero a integral

$$\int_{M+1}^{\infty} \frac{c}{(u-M)^2} du = c\left[\frac{-1}{u-M}\right]_{M+1}^{\infty} = c < \infty,$$

polo que o teorema 1.9 garante que a integral $\int_0^\infty \frac{\rho_2(u)}{(s+u)^2} du$ converxe uniformemente sobre K.

De aquí séguese polo teorema 1.10 que a derivada da función

$$\mathbb{C} - (\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad s \longrightarrow \int_0^\infty \frac{\rho_2(u)}{(s+u)^2} du,$$

é a función

$$\mathbb{C} - (\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad s \longrightarrow -2\int_0^\infty \frac{\rho_2(u)}{(s+u)^3} du.$$

Probemos agora a igualdade:

$$\int_0^\infty \frac{\rho_2(u)}{(s+u)^2} du = \int_0^\infty \frac{\rho_1(u)}{s+u} du \quad \forall\, s \in \mathbb{C} - (\infty, 0].$$

Tense que $\rho_2'(u) = \rho_1(u)\ \forall\, u \notin \mathbb{N}$.

Sexa $b > 0$ real, integrando por partes obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{\rho_1(u)}{s+u} du &= \left[\frac{\rho_2(u)}{s+u}\right]_0^b + \int_0^b \frac{\rho_2(u)}{(s+u)^2} du \\ &= \frac{\rho_2(b)}{s+b} + \int_0^b \frac{\rho_2(u)}{(s+u)^2} du.\end{aligned}$$

Agora

$$\left|\frac{\rho_2(b)}{(s+b)}\right| \leq \frac{A}{|s+b|} \longrightarrow 0 \quad \text{se} \quad b \longrightarrow \infty,$$

sendo $A > 0$ tal que $|\rho_2(u)| \leq A$, calquera que sexa u.

Logo

$$\frac{\rho_2(b)}{s+b} \longrightarrow 0 \quad \text{se} \quad b \longrightarrow \infty,$$

e polo tanto

$$\int_0^\infty \frac{\rho_2(u)}{(s+u)^2} du = \int_0^\infty \frac{\rho_1(u)}{s+u} du \ \ \forall\, s \in \mathbb{C} - (-\infty, 0].$$

$\square$

Fagamos aquí un inciso para recordar que un dos nosos obxectivos era probar que a función

$$\mathbb{C}-(-\infty,0] \longrightarrow \mathbb{C} \text{ dada por } s \mapsto \int_0^\infty \frac{\rho_1(u)}{s+u}du,$$

é holomorfa, e ca anterior igualdade xa temos isto cumprido. Polo tanto a expresión (9) :

$$\ln\Gamma(s)=\left(s-\frac{1}{2}\right)\ln s - s + 1 + \ln\sqrt{2\pi} - \int_0^\infty \frac{\rho_1(u)}{s+u}du$$

vista na proba da fórmula de Stirling define unha función holomorfa no aberto conexo $\mathbb{C}-(-\infty,0]$, que era un dos nosos obxectivos.

Lema 3.13. *Para $t\in\mathbb{R}$ con $t>0$, verifícase:*

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^\infty \frac{\rho_1(u)}{it+u}du=0.$$

Proba. Isto é consecuencia do lema previo e tendo en conta o seguinte resultado: □

Lema 3.14. *Sexa $\delta\in\mathbb{R}$ tal que $0<\delta<\pi$. Existe $M>0$ tal que:*

$$\int_0^\infty \frac{\rho_2(u)}{(s+u)^2}du = O\left(\frac{1}{|s|}\right),$$

para todo $s\in\mathbb{C}-\{0\}$ que verifique $-\pi+\delta\le arg(s)\le\pi-\delta$.

Proba. Sexa pois $\delta>0$ un número real tal que $0<\delta<\pi$ e $s\in\mathbb{C}-\{0\}$ verificando $-\pi+\delta\le\theta\le\pi-\delta$, onde $\theta=\arg(s)$.

Dende que $\rho_2(u)$ é acoutada será

$$\mathrm{I}(s):=\left|\int_0^\infty \frac{\rho_2(u)}{(s+u)^2}du\right| \le c_1\int_0^\infty \frac{du}{|s+u|^2}, \tag{10}$$

sendo $c_1>0$ tal que $|\rho_2(u)|\le c_1$, calquera que sexa u.

Vexamos que $-\cos\delta\le\cos\theta$.

Dado que $-\pi+\delta\le\theta\le\pi-\delta$, será:

$$\begin{cases}\cos(-\pi+\delta)\le\cos\theta & \text{se } \theta\le 0\\ \cos\theta\ge\cos(\pi-\delta) & \text{se } \theta\ge 0\end{cases}$$

Ademais, das relacións fundamentais trigonométricas, deducimos

$$\cos(-\pi+\delta)=\cos\pi\cos\delta+\operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\delta=-\cos\delta\Rightarrow -\cos\delta\le\cos\theta,$$

e

$$\cos(\pi-\delta)=\cos(-(-\pi+\delta))=-\cos\delta\Rightarrow -\cos\delta\le\cos\theta.$$

En calquera caso, $-\cos\delta \leq \cos\theta$.

Por outra banda, expresando s na súa forma exponencial de

$$s+u = u+|s|e^{i\theta} = u+|s|\cos\theta + i|s|\operatorname{sen}\theta,$$

deducimos que

$$\begin{aligned}|s+u|^2 &= |u+|s|\cos\theta+i|s|\operatorname{sen}\theta|^2 = (u+|s|\cos\theta)^2+(|s|\operatorname{sen}\theta)^2\\ &= u^2+|s|^2\cos^2\theta+2u|s|\cos\theta+|s|^2\operatorname{sen}^2\theta\\ &= |s|^2+2u|s|\cos\theta+u^2\\ &\geq |s|^2-2u|s|\cos\delta+u^2,\end{aligned}$$

logo

$$\frac{1}{|s+u|^2} \leq \frac{1}{|s|^2-2u|s|\cos\delta+u^2}.$$

Notemos que $|s|^2-2u|s|\cos\delta+u^2 = |(u-|s|\cos\delta)+i|s|\operatorname{sen}\delta|^2>0$, pois se $|(u-|s|\cos\delta+i|s|\operatorname{sen}\delta)|^2=0$ será ou ben $|s|=0\,(\Rightarrow s=0)$, ou ben $\operatorname{sen}\delta=0$, pero $s\in\mathbb{C}-\{0\}$, logo debe ser $\operatorname{sen}\delta=0$, o que é absurdo pois $0<\delta<\pi$.

Consecuentemente, (10) pasa a

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(s) \leq c_1\int_0^\infty \frac{du}{|s|^2-2u|s|\cos\delta+u^2} &= c_1\int_0^\infty \frac{du}{|s|^2\operatorname{sen}^2\delta\left[\left(\frac{u-|s|\cos\delta}{|s|\operatorname{sen}\delta}\right)^2+1\right]}\\ &= \frac{c_1}{|s|\operatorname{sen}\delta}\int_0^\infty \frac{\frac{1}{|s|\operatorname{sen}\delta}}{\left(\frac{u-|s|\cos\delta}{|s|\operatorname{sen}\delta}\right)^2+1}du = \frac{c_1}{|s|\operatorname{sen}\delta}\left[\arctan\left(\frac{u-|s|\cos\delta}{|s|\operatorname{sen}\delta}\right)\right]_0^\infty\\ &= \frac{c_1}{|s|\operatorname{sen}\delta}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(-\cot\delta)\right) = \frac{c_1}{|s|\operatorname{sen}\delta}\left(\frac{\pi}{2}-(\delta-\frac{\pi}{2})\right)\\ &= \frac{c_1(\pi-\delta)}{\operatorname{sen}\delta}\cdot\frac{1}{|s|},\end{aligned}$$

onde a constante que multiplica a $\frac{1}{|s|}$ depende só de δ.

Isto proba o lema. □

Finalmente observemos que para $s=it$ con $t>0$:

$$0\leq\left|\operatorname{Re}\int_0^\infty\frac{\rho_1(u)}{it+u}du\right|\leq\left|\int_0^\infty\frac{\rho_1(u)}{it+u}du\right| = O\left(\frac{1}{t}\right)\longrightarrow 0,$$

cando $t\longrightarrow\infty$, e así a fórmula de Stirling:

$$\ln\Gamma(s) = \left(s-\frac{1}{2}\right)\ln s - s+\ln\sqrt{2\pi}-\int_0^\infty\frac{\rho_1(u)}{s+u}du,$$

queda xustificada.

Corolario 3.15. *Para $s \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ ten validez a fórmula:*

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \ln s - \frac{1}{2s} + 2\int_0^\infty \frac{\rho_2(u)}{(s+u)^3}du.$$

Proba. É consecuencia inmediata da fórmula de Stirling e da aplicación do lema 3.12. □

Corolario 3.16. *Sexa $\delta > 0$ un número real tal que $0 < \delta < \pi$ e $s \in \mathbb{C} - \{0\}$ verificando $-\pi + \delta \leq \theta \leq \pi - \delta$, onde $\theta = arg(s)$. Entón:*

$$\ln \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - s + \ln \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{|s|}\right).$$

Polo tanto

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|\Gamma(s+1)|}{|s^s e^{-s}\sqrt{2\pi s}|} = 1,$$

e en particular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^n \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Proba. A fórmula

$$\ln \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - s + \ln \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{|s|}\right),$$

é consecuencia inmediata da fórmula de Stirling e dos lemas 3.12 e 3.14.

Probemos que:

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|\Gamma(s+1)|}{|s^s e^{-s}\sqrt{2\pi s}|} = 1,$$

Para $s \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, ...\}$, tendo presenta a ecuación funcional vista no teorema 3.4 resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{|\Gamma(s+1)|}{|s^s e^{-s}\sqrt{2\pi s}|} &= \frac{|s\Gamma(s)|}{|s^s e^{-s}\sqrt{2\pi s}|} \\
&= \frac{|\Gamma(s)|}{|s^s s^{-\frac{1}{2}} e^{-s}\sqrt{2\pi}|} \\
&= \frac{\left|e^{\ln \Gamma(s)}\right|}{|e^{s \ln s} e^{-\frac{1}{2}\ln s} e^{-s} e^{\ln \sqrt{2\pi}}|} \\
&= \left| e^{\ln \Gamma(s) - \left(s - \frac{1}{2}\right)\ln s + s - \ln\sqrt{2\pi}} \right|.
\end{aligned}$$

Entón:

$$\begin{aligned}
\lim_{|s|\to\infty} \frac{|\Gamma(s+1)|}{|s^s e^{-s}\sqrt{2\pi s}|} &= \lim_{|s|\to\infty} \left| e^{\ln \Gamma(s) - \left(s - \frac{1}{2}\right)\ln s + s - \ln\sqrt{2\pi}} \right| \\
&= \lim_{|s|\to\infty} e^{\mathrm{Re}\left\{\ln \Gamma(s) - \left(s - \frac{1}{2}\right)\ln s + s - \ln\sqrt{2\pi}\right\}} \\
&= e^{\left(\lim_{|s|\to\infty} \mathrm{Re}\left\{\ln \Gamma(s) - \left(s - \frac{1}{2}\right)\ln s + s - \ln\sqrt{2\pi}\right\}\right)}.
\end{aligned}$$

Vexamos que

$$\lim_{|s|\to\infty} \mathrm{Re}\left\{\ln\Gamma(s) - \left(s-\frac{1}{2}\right)\ln s + s - \ln\sqrt{2\pi}\right\} = 0.$$

Como

$$0 \le |\mathrm{Re} s| \le |s|,$$

de

$$\ln\Gamma(s) - \left(s-\frac{1}{2}\right)\ln s + s - \ln\sqrt{2\pi} = O\left(\frac{1}{|s|}\right),$$

deducimos:

$$\begin{aligned} 0 &\le \lim_{|s|\to\infty}\left|\mathrm{Re}\left\{\ln\Gamma(s) - \left(s-\frac{1}{2}\right)\ln s + s - \ln\sqrt{2\pi}\right\}\right| \\ &\le \lim_{|s|\to\infty}\left|\ln\Gamma(s) - \left(s-\frac{1}{2}\right)\ln s + s - \ln\sqrt{2\pi}\right| \\ &\le \lim_{|s|\to\infty}\frac{c}{|s|} = 0, \end{aligned}$$

onde $c > 0$ é unha constante.

Así pois:

$$\lim_{|s|\to\infty}\frac{|\Gamma(s+1)|}{|s^s e^{-s}\sqrt{2\pi s}|} = e^0 = 1.$$

□

Corolario 3.17. *Sexa $\delta > 0$ un número real tal que $0 < \delta < \pi$ e $s \in \mathbb{C} - \{0\}$ verificando $-\pi + \delta \le \theta \le \pi - \delta$, onde $\theta = arg(s)$. Entón:*

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \ln s - \frac{1}{2s} + O\left(\frac{1}{|s|^2}\right).$$

Proba. Polo corolario 3.15

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \ln s - \frac{1}{2s} + 2\int_0^\infty \frac{\rho_2(u)}{(s+u)^3}du.$$

Bastará ver que

$$\int_0^\infty \frac{\rho_2(u)}{(s+u)^3}du = O\left(\frac{1}{|s|^2}\right).$$

Sexa $c > 0$ tal que $|\rho_2(u)| \le c$, para calquera que sexa u.

O razoamento da demostración e completamente análogo ó visto no lema 3.14:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}(s) &:= \left| \int_0^\infty \frac{\rho_2(u)}{(s+u)^3} du \right| \leq c \int_0^\infty \frac{du}{|s+u|^3} \\
&\leq c \int_0^\infty \frac{du}{(|s|^2 - 2u|s|\cos\delta + u^2)\sqrt{|s|^2 - 2u|s|\cos\delta + u^2}} \\
&= c \int_0^\infty \frac{du}{[(u - |s|\cos\delta)^2 + \lambda^2]\sqrt{(u - |s|\cos\delta)^2 + \lambda^2}},
\end{aligned}
$$

onde $\lambda = |s| \operatorname{sen} \delta$.

Considerando cambio de variable $x = u - |s|\cos\delta$, a primitiva a calcular é:

$$
\int \frac{dx}{(x^2 + \lambda^2)\sqrt{x^2 + \lambda^2}}
$$

que, co cambio $x = \lambda \tan y \Rightarrow dx = \lambda(1 + \tan^2 y)dy$, séguese:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\lambda(1 + \tan^2 y)}{\lambda^2(1 + \tan^2 y)\sqrt{\lambda^2(1 + \tan^2 y)}} dy = \int \frac{1}{\lambda^2\sqrt{1 + \tan^2 y}} dy = \int \frac{\cos y}{\lambda^2} dy \\
= \frac{1}{\lambda^2} \operatorname{sen} y.
\end{aligned}
$$

Saquemos unha expresión para $\operatorname{sen} y$:

$$
\begin{aligned}
x = \lambda \tan y \Rightarrow x = \lambda \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} &\Rightarrow \operatorname{sen} y = \frac{x \cdot \cos y}{\lambda} \Rightarrow \operatorname{sen} y = \frac{x\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}}{\lambda} \\
&\Rightarrow \operatorname{sen}^2 y = \frac{x^2(1 - \operatorname{sen}^2 y)}{\lambda^2} \Rightarrow \lambda^2 \operatorname{sen}^2 y = x^2 - x^2 \operatorname{sen}^2 y \\
&\Rightarrow (\lambda^2 + x^2) \operatorname{sen}^2 y = x^2 \Rightarrow \operatorname{sen} y = \frac{x}{\sqrt{\lambda^2 + x^2}}.
\end{aligned}
$$

Finalmente:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}(s) &\leq c \left[\frac{x}{\lambda^2\sqrt{x^2 + \lambda^2}} \right]_{-|s|\cos\delta}^{\infty} = c \left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{|s|\cos\delta}{\lambda^2|s|} \right] \\
&= \frac{c(1 + \cos\delta)}{\operatorname{sen}^2 \delta} \cdot \frac{1}{|s|^2}.
\end{aligned}
$$

Con isto probamos o corolario.

□

<u>Reseña matemática</u>:*Leonhard Paul Euler* (1707 − 1783). *Foi un matemático e físico suízo. O análises matemático é testemuña dun dos grandes xenios da historia. A notación* $f(x)$, *a fórmula* $e^{\pi i} + 1 = 0$, *as funcións trigonométricas, a definición do número e, a irracionalidade*

de $\zeta(2)$*, a unidade imaxinaria* i*, e un longo etcétera, son algunhas das marabillas cas que nos podemos deleitar ó abrir algún texto matemático.*

Ó longo da súa vida a súa investigación matemática veu a supoñer ó redor de 800 publicacións anuais. Ningún matemáticos superou xamais a produción de Euler, a quen o académico francés François Arago apodou "O análises encarnado". Durante case medio século despois da súa morte continuaron aparecendo obras inéditas de Euler nas publicacións da Academia de San Petersburgo.

Pronto adquiriu fama internacional. A súa facilidade para realizar cálculos que involucraban cifras moi elevadas era notable. Cóntase que sabía de memoria as seis primeiras potencias dos cen primeiros números. Os seus alumnos recorrían a el para corroborar certos cálculos de series infinitas quedando pasmados ca ferramenta de cálculo de seu profesor.

Neste traballo presentamos a relación establecida por Euler entre a función zeta e os números primos. A proba que el ofreceu no seu tempo require duns mínimos coñecementos de álxebra, penso que nin sequera iso. A pesar de ser un gran xenio non presumía dilo. A súa persoa era respectada por personaxes da alta nobreza. De feito recibía invitacións constantes de diversos países para traballar alí.

Durante a invasión rusa a Alemaña o exército saqueou unha granxa que era da súa propiedade. O acto chegou a coñecemento do xeneral e a perda foille rapidamente reposta, inclusive foi obsequiado con 4000 floríns pola emperatriz Isabel cando se decatou do sucedido.

A produción matemática de Euler englobaba as matemáticas como un todo común. Practicamente todas as fronteiras matemáticas, tanto pura como aplicada, dos niveis máis elementais ata os máis avanzados, foron testemuña da súa pluma. A notación matemática empregada hoxe en día pódese afirmar que é máis debida a Euler que a ningún outro matemático ó longo da historia.

A vista de Euler viuse en decaída a partir dos seus 30 anos. Durante un acto de guerra, o fogo cruzado provocou chamas de lume na casa de Euler. Un compatriota, Peter Grim, salvou a Euler do lume, estaba practicamente cego. Aínda que se perderon algúns libros, salvouse a súa vida, moito máis importante, e algúns dos seus escritos máis prezados. Unha operación devolveulle a vista, pero esa alegría duroulle ben pouco. Os últimos dezasete anos da súa vida pasounos sen apenas visión, pero nin esa traxedia conseguiu interromper a súas investigacións e publicacións científicas.

Faleceu en 1783 a idade de 76 anos, de maneira case repentina mentres tomaba té e xogaba cun dos seus netos.

Capítulo 4

A función Zeta de Riemann

4.1. Definición e fórmula de Euler

Definición 4.1. Para $s \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}s = \sigma > 1$, defínese a función zeta de Riemann como:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Observemos que a serie do lado dereito da anterior igualdade converxe absoluta e uniformemente, pois se $\sigma \geq \sigma_0 > 1$ e $n \geq 1$, será:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \left| \frac{1}{n^{\sigma+it}} \right| = \frac{1}{|n^{\sigma+it}|} &= \frac{1}{|n^{\sigma}||e^{it\ln n}|} \\ = \frac{1}{n^{\sigma}} \leq \frac{1}{n^{\sigma_0}}, \end{aligned}$$

e como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{u^{\sigma_0}} du = 1 + \frac{1}{\sigma_0 - 1} = \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - 1} < \infty,$$

é unha serie converxente, de

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^{\sigma}|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}},$$

dedúcese do criterio M-Weierstrass que a serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converxe absoluta e uniformemente no aberto conexo $\Omega = \{s \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}s > 1\}$, e en consecuencia, $\zeta(s)$ representa unha función analítica en dito semiplano.

No que segue, salvo indicación explícita, denotaremos $\sigma = \mathrm{Re}s$.

Teorema 4.2 (O produto de Euler)**.** *Para* $\sigma > 1$,

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

onde p *recorre tódolos números primos.*

Proba. Sexa S un conxunto de números primos e denotemos por

$$\pi(S) := \{m \geq 1/\text{Os factores primos de } m \text{ están en } S\}.$$

En particular, $\pi(\varnothing) = \{1\}$.

Veremos que por indución sobre $\mathrm{Card}(S)$ que para S finito verifícase:

$$\prod_{p \in S} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{m \in \pi(S)} \frac{1}{m^s} \tag{1}$$

Observación: Notemos que debido a converxencia absoluta da serie non é necesario preocuparse da orde da multiplicación e da suma. Ademais, dado que $\sigma > 1$, resulta que $|p^{-s}| = p^{-\sigma} < 1$, e polo tanto cada factor do produto infinito do enunciado o podemos poñer como unha progresión xeométrica da seguinte forma:

$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{p^s}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}}.$$

1) Paso base: Se $S = \varnothing$, entón, co convenio de tomar igual a 1 todo produto sobre o conxunto baleiro, a igualdade redúcese a $1 = 1$, logo é certa.

2) Hipóteses de indución: Supoñamos que a igualdade (1) se verifica para S, e sexa p' un primo tal que $p' \notin S$, e vexamos que se verifica para $S \cup \{p'\}$.

En virtude do teorema fundamental da aritmética, tense que:

$$m_1 \in \pi(S \cup \{p'\}) \Leftrightarrow \exists!\, m \in \pi(S),\ \exists!\, k \geq 0/m_1 = mp'^k.$$

Temos pois que:

$$\begin{aligned}
\prod_{p\in S\cup\{p'\}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} &= \left(1-\frac{1}{p'^s}\right)^{-1}\prod_{p\in S}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\\
&= \left(1-\frac{1}{p'^s}\right)^{-1}\sum_{m\in\pi(S)}\frac{1}{m^s}, \quad \text{(Hipóteses de indución)}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p'^{ks}}\right)\left(\sum_{m\in\pi(S)}\frac{1}{m^s}\right), \quad \text{(Observación feita)}\\
&= \sum_{\substack{m\in\pi(S)\\ k\geq 0}}\frac{1}{(mp'^k)^s}\\
&= \sum_{m_1\in\pi(S\cup\{p'\})}\frac{1}{m_1^s},
\end{aligned}$$

o que proba a igualdade (1).

Sexa agora $x \geq 2$ un natural, e definamos:

$$S(x) := \{p/p \leq x\}.$$

É claro que se $m \notin \pi(S(x))$, entón $m > x$.

Temos pois que:

$$\begin{aligned}
\zeta(s)-\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} &= \zeta(s)-\prod_{p\in S(x)}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\\
&= \zeta(s)-\sum_{m\in\pi(S(x))}\frac{1}{m^s}\\
&= \sum_{m\notin\pi(S(x))}\frac{1}{m^s},
\end{aligned}$$

entón

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left|\zeta(s)-\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\right| = \left|\sum_{m\notin\pi(S(x))}\frac{1}{m^s}\right|\\
&\leq \sum_{m\notin\pi(S(x))}\left|\frac{1}{m^s}\right| = \sum_{m\notin\pi(S(x))}\frac{1}{m^\sigma}\\
&\leq \sum_{m>x}\frac{1}{m^\sigma}.
\end{aligned}$$

Agora, posto que a serie $\sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{m^{\sigma}}$ é converxente, será $\lim_{x\to\infty} \sum_{m>x} \dfrac{1}{m^{\sigma}} = 0$.

Estamos dicindo:

$$0 \leq \left| \zeta(s) - \prod_{p\leq x} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \right| \longrightarrow 0,$$

cando $x \to \infty$, é dicir dado $\varepsilon > 0$, será

$$0 \leq \left| \zeta(s) - \prod_{p\leq x} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \right| < \varepsilon,$$

co cal

$$\zeta(s) = \prod_{p\leq x} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \text{ se } \sigma > 1,$$

e de (1) e isto último obtense o resultado. $\square$

Corolario 4.3. *Para* $\sigma > 1$,

$$\zeta(s) \neq 0.$$

Proba. Dado que $\sigma > 1$, acabamos de ver que

$$\zeta(s) = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

ou se se prefire,

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Así pois

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| &= \left| \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \right| \leq \prod_{p} \left(1 + \frac{1}{p^{\sigma}}\right) \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{\sigma}} \\ &= \frac{\sigma}{\sigma - 1}. \end{aligned}$$

Pero dende que $\sigma > 1$, será $\sigma - 1 > 0$ e de $\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| < \frac{\sigma}{\sigma-1}$, séguese que $|\zeta(s)| > \frac{\sigma-1}{\sigma} > 0$, é dicir, $\zeta(s) \neq 0$. $\square$

4.2. Prolongación analítica e ecuación funcional.

Agora estenderemos $\zeta(s)$ ó semiplano $\sigma > 0$.

Lema 4.4. *Para $s \neq 1$, $\sigma > 0$ e $N \geq 1$, se ten*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}N^{-s} + s\int_N^\infty \frac{\rho(u)}{u^{s+1}}du,$$

onde $\rho(u) = \dfrac{1}{2} - \{u\}$.

Proba. Sexan M e N números naturais tales que $M > N$. Entón aplicando a fórmula de sumación de Euler á función $\varphi(u) = \frac{1}{u^s}$, obtemos:

$$\begin{aligned}\sum_{N<n\leq M} \frac{1}{n^s} &= \int_N^M \frac{du}{u^s} + s\int_N^M \frac{\rho(u)}{u^{s+1}}du + \frac{\rho(u)}{u^s}\bigg|_N^M \\ &= \frac{u^{-s+1}}{1-s}\bigg|_N^M + s\int_N^M \frac{\rho(u)}{u^{s+1}}du + \frac{1}{2}M^{-s} - \frac{1}{2}N^{-s} \\ &= \frac{M^{1-s}}{1-s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} + \frac{1}{2}M^{-s} - \frac{1}{2}N^{-s} + s\int_N^M \frac{\rho(u)}{u^{s+1}}du.\end{aligned}$$

Agora, pasando límites á anterior igualdade cando $M \longrightarrow \infty$ como segue:

$$\lim_{M\to\infty}\left(\sum_{n=N+1}^{M} \frac{1}{n^s}\right) = \lim_{M\to\infty}\left(\frac{M^{1-s}}{1-s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} + \frac{1}{2}M^{-s} - \frac{1}{2}N^{-s} + s\int_N^M \frac{\rho(u)}{u^{s+1}}du\right),$$

resulta que para $\sigma > 1$ nos queda:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}N^{-s} + s\int_N^\infty \frac{\rho(u)}{u^{s+1}}du.$$

Sen embargo

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s},$$

e así

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}N^{-s} + s\int_N^\infty \frac{\rho(u)}{u^{s+1}}du,$$

e a igualdade está probada para $\sigma > 1$.

Por último observemos que a función $u \mapsto \frac{1}{2} - \{u\}$ é acoutada, xa que é periódica de período $T = 1$, e está acoutada no intervalo $[0, 1]$, polo tanto a integral do lado dereito da última igualdade converxe uniformemente sobre cada compacto do semiplano $\sigma > 0$.

Por esta razón $\zeta(s)$ se estende de forma analítica en dito semiplano, salvo en $s = 1$, onde presenta un polo simple con residuo igual a 1. As claves establecémolas no seguinte corolario. $\square$

Corolario 4.5. *$\zeta(s)$ é unha función analítica no semiplano $\sigma > 0$, salvo no punto $s = 1$ onde presenta un polo simple con residuo igual a* 1.

Proba. Para $\sigma > 0$, e en particular tomando $N = 1$, o lema previo permítenos escribir:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + s\int_1^\infty \frac{\rho(u)}{u^{s+1}}du.$$

Bastará ver que a integral do lado dereito converxe uniformemente.

Sexa $S = \{s \in \mathbb{C}/\sigma > 0\}$ e consideremos a función $f : [1,\infty) \times S \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(u,s) = \frac{\rho(u)}{u^{s+1}}$.

Para $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, temos que:

$$|f(u,s)| = \left|\frac{\rho(u)}{u^{s+1}}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2} - \{u\}}{u^{s+1}}\right| \leq \frac{1}{2u^{\sigma+1}} \leq \frac{1}{2u^{\sigma_0+1}},$$

e como a integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{u^{\sigma_0+1}}du = \lim_{x\to\infty} \left.\frac{u^{-\sigma_0}}{-\sigma_0}\right|_1^x = \frac{1}{\sigma_0} < \infty,$$

é converxente, por ser o integrando unha función holomorfa respecto de s, o teorema 1.9 de converxencia uniforme de funcións holomorfas definidas por integrais establece que a integral $\int_1^\infty \frac{\rho(u)}{u^{s+1}}du$ converxe uniformemente sobre S e así $\zeta(s)$ representa unha función analítica no semiplano $\sigma > 0$, salvo claro está, en $s = 1$.

Por outra banda, dende que a función $s \mapsto \int_1^\infty \frac{\rho(u)}{u^{s+1}}du$ é holomorfa, en torno a $s = 1$ admitirá un desenrolo en serie de potencias da forma:

$$\sum_{n=0}^\infty a_n(s-1)^n,$$

e por definición de residuo como coeficiente a_{-1} do desenrolo en serie de Laurent dunha función holomorfa, é obvio que $\mathrm{Res}(\zeta, 1) = 1$, e evidentemente presenta en $s = 1$ un polo simple, pois por exemplo

$$\lim_{s\to 1} \frac{1}{s-1} = \infty,$$

co que concluímos. $\square$

Exemplos: Imos ver que as series de Laurent das funcións $\zeta(s)$ e $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ en $s = 1$ son, respectivamente:

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{1}{s-1} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (s-1)^n \\ \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= -\frac{1}{s-1} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (s-1)^n,\end{aligned}$$

onde γ é a constante de Euler.

En efecto, posto que no punto $s = 1$ a función $\zeta(s)$ ten un polo simple de residuo igual a 1, a súa serie de Laurent nunha veciñanza de $s = 1$ é:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + a_0 + a_1(s-1) + \cdots$$

Trátase pois de ver que $a_0 = \gamma$, isto é, comprobaremos que

$$\lim_{s \to 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) = \gamma.$$

Polo Lema 4.4 temos que, para $\operatorname{Re}(s) > 0$ con $N = 1$:

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= 1 + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} + s \int_1^{\infty} \frac{\frac{1}{2} - u + [u]}{u^{s+1}}\, du \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + s \int_1^{\infty} \frac{\frac{1}{2} - u + [u]}{u^{s+1}}\, du;\end{aligned}$$

e daquela:

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right) &= \frac{1}{2}+\int_1^\infty \frac{\frac{1}{2}-u+[u]}{u^2}\,du \\
&= 1+\int_1^\infty \frac{[u]-u}{u^2}\,du = 1+\lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{[u]-u}{u^2}\,du \\
&= 1+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1}\frac{[u]-u}{u^2}\,du \\
&= 1+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N-1}\int_1^N \frac{n-u}{u^2}\,du \\
&= 1+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N-1}\left(n\int_n^{n+1}\frac{1}{u^2}\,du-\int_n^{n+1}\frac{1}{u}\,du\right) \\
&= 1+\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N-1} n\left(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right)-\ln N\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}\left(1+\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n+1}-\ln N\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\ln N\right)=\gamma.
\end{aligned}$$

Estudemos agora a serie da función $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$. Xa sabemos que:

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2}+a_1+\sum_{n=2}^\infty n a_n (s-1)^{n-1}.$$

Doutra banda, a función

$$(s-1)\zeta(s) = 1+\gamma(s-1)+\sum_{n=1}^\infty a_n(s-1)^{n+1},$$

é unha función holomorfa nunha veciñanza de 1 e non se anula en $s=1$. Daquela,

$$\sum_{n=0}^\infty b_n(s-1)^n = \frac{1}{(s-1)\zeta(s)}$$

é unha función holomorfa nunha veciñanza de 1.

Calculemos logo b_0 e b_1; temos que:

$$\begin{aligned}
1 &= (1+\gamma(s-1)+\cdots)(b_0+b_1(s-1)+\cdots) \\
&= b_0+(b_1+\gamma b_0)(s-1)+\cdots
\end{aligned}$$

Así, deducimos que $b_0 = 1$ e $b_1 = \gamma$. Obtemos logo finalmente que,

$$\begin{aligned}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \frac{(s-1)\zeta'(s)}{(s-1)\zeta(s)} = \left(-\frac{1}{s-1} + a_1(s-1) + \cdots\right)(1 - \gamma(s-1) + \cdots) \\ &= -\frac{1}{s-1} + \gamma + \cdots\end{aligned}$$

Antes de estender de forma analítica a función zeta de Riemann a todo o plano complexo, introduciremos a función theta-series, así como as súas propiedades máis relevantes.

Definición 4.6. Para $s \in \mathbb{C}$ con $\sigma > 0$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ arbitrario, defínese a función theta-series como:

$$\theta(s,\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi s(n+\alpha)^2}.$$

Vexamos que para cada $s \in \mathbb{R}$ con $s > 0$, a función $\theta(s,-)$ é enteira.

Sexa $R > 0$ un número real e $\alpha \in \mathbb{C}$ de xeito que $|\alpha| \leq R$. Entón, para cada $n \in \mathbb{Z}$ verificando $|n| \geq 3R$ e $|n| \geq \frac{3}{\pi s}$, temos que:

$$|\mathrm{Re}\alpha| \leq |\alpha| \leq R \leq \frac{|n|}{3} \text{ e } |\mathrm{Im}\alpha| \leq |\alpha| \leq R \leq \frac{|n|}{3},$$

de onde

$$(n + \mathrm{Re}\alpha)^2 = |n + \mathrm{Re}\alpha|^2 \geq (|n| - |\mathrm{Re}\alpha|)^2 \geq \left(|n| - \frac{|n|}{3}\right)^2 = \frac{4n^2}{9},$$

e

$$(\mathrm{Im}\alpha)^2 = |\mathrm{Im}\alpha|^2 \leq \frac{n^2}{9},$$

co cal

$$(n + \mathrm{Re}\alpha)^2 - (\mathrm{Im}\alpha)^2 \geq \frac{n^2}{3}.$$

Así pois

$$\begin{aligned}\left|e^{-\pi s(n+\alpha)^2}\right| &= e^{-\pi \mathrm{Re}\left[s(n+\alpha)^2\right]} = e^{-\pi s\left[(n+\mathrm{Re}\alpha)^2 - (\mathrm{Im}\alpha)^2\right]} \\ &\leq e^{-\frac{\pi s n^2}{3}} \leq e^{-|n|} \text{ se } |n| \geq 3R, \ |n| \geq \frac{3}{\pi s}.\end{aligned}$$

É dicir, se $|\alpha| \leq R$, entón, salvo un número finito de termos, a serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|e^{-\pi s(n+\alpha)^2}\right|$, está limitada superiormente pola serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|n|}$, que é converxente, e de aquí deducimos que para cada $s \in \mathbb{R}$ con $s > 0$ fixo, a serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi s(n+\alpha)^2}$ converxe uniformemente sobre cada compacto de $\mathbb{C}$, e consecuentemente $\theta(s,-)$ é unha función holomorfa.

Notemos ademais que $\theta(s,\alpha) = \theta(s,\alpha+1)$.

Vexamos agora que para $\alpha \in \mathbb{R}$ fixo, a función $\theta(-,\alpha)$ tamén é holomorfa no semiplano $\sigma > 0$.

Sexa $a \in \mathbb{R}$ fixo tal que $a > 0$ e sexa $s \in \mathbb{C}$ con $\sigma > a$. Temos pois que:

$$\left|e^{-\pi s(n+\alpha)^2}\right| = e^{-\pi(n+\alpha)^2 \mathrm{Re} s}.$$

Elixamos n de xeito que $|n| \geq |\alpha| + \frac{1}{\pi a}$. Entón $a \geq \frac{1}{\pi|n+\alpha|}$, e ademais:

$$\begin{aligned} e^{-\pi(n+\alpha)^2 \mathrm{Re} s} &\leq e^{-|n+\alpha|} \leq e^{-|n|+|\alpha|} \\ &= e^{|\alpha|}e^{-|n|}, \end{aligned}$$

e polo tanto

$$\left|e^{-\pi s(n+\alpha)^2}\right| \leq e^{|\alpha|}e^{-|n|}.$$

Así pois, salvo par un número finito de termos, para $\sigma > a$ a serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|e^{-\pi s(n+\alpha)^2}\right|$, está limitada superiormente pola serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{|\alpha|}e^{-|n|}$, que é converxente. Consecuentemente, a serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi s(n+\alpha)^2}$ converxe uniformemente en cada compacto do semiplanos $\sigma > 0$, e polo tanto, $\theta(-,\alpha)$ define unha función holomorfa en dito semiplano.

Lema 4.7. *Para $s \in \mathbb{C}$ con $\sigma > 0$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ temos a seguinte identidade:*

$$\theta\left(\frac{1}{s},\alpha\right) = \sqrt{s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 s + 2\pi i n\alpha} = \sqrt{s}e^{-\frac{\pi\alpha^2}{s}}\theta\left(s, -\frac{i\alpha}{s}\right).$$

Proba. Por unha banda,

$$\begin{aligned} \sqrt{s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 s+2\pi i n\alpha} &= \sqrt{s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi s\left(n^2 - 2in\alpha\frac{1}{s}\right)} = \sqrt{s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi s\left[\left(n-\frac{i\alpha}{s}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{s^2}\right]} \\ &= \sqrt{s}e^{-\frac{\pi\alpha^2}{s}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi s\left(n-\frac{i\alpha}{s}\right)^2} = \sqrt{s}e^{-\frac{\pi\alpha^2}{s}}\theta\left(s,-\frac{i\alpha}{s}\right), \end{aligned}$$

co que probamos a segunda a igualdade.

Dado que $\theta(s,-)$ é unha función enteira para cada $s > 0$, do principio de identidade para funcións analíticas dedúcese, que para probar a primeira igualdade, será suficiente facelo para $\alpha \in \mathbb{R}$.

A función $\theta(s,-) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciable C^∞ e periódica de período $T = 1$. Polo tanto a serie Fourier de $\theta(s,-)$ converxe absoluta e uniformemente en $\mathbb{R}$ a $\theta(s,-)$:

$$\theta(s,\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n\alpha},\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

onde

$$c_n = \int_0^1 \theta(s,u)e^{-2\pi i n u}du.$$

Temos que:

$$
\begin{aligned}
c_n &= \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi s(m+u)^2} e^{-2\pi i n u} du \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{-\pi s(m+u)^2} e^{-2\pi i n u} du \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_m^{m+1} e^{-\pi s r^2 - 2\pi i n(r-m)} dr, \quad (r = m+u) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi s r^2 - 2\pi i n r} dr \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\left(\sqrt{\pi s} r + \sqrt{\frac{\pi}{s}} i n\right)^2 + \frac{\pi n^2}{s}\right]} dr \\
&= e^{-\frac{\pi n^2}{s}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\pi s} r + \sqrt{\frac{\pi}{s}} i n\right)^2} dr \\
&= e^{-\frac{\pi n^2}{s}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{\pi s} r)^2} dr, \left(\text{pois } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ib)^2} dx, \text{ para cada } b \in \mathbb{R}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{\pi n^2}{s}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv, \quad (v = \sqrt{\pi s} r) \\
&= \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{\pi n^2}{s}}, \quad \left(\text{pois } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi} \text{ polo corolario 3.10}\right).
\end{aligned}
$$

A raíz do anterior, (2) pasa a

$$\theta(s, \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n \alpha} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{s}} + 2\pi i n \alpha,$$

co cal

$$\theta\left(\frac{1}{s}, \alpha\right) = \sqrt{s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 s + 2\pi i n \alpha},$$

o que proba a primeira igualdade. □

Corolario 4.8. *Para $x > 0$*

$$\theta\left(\frac{1}{x}, 0\right) = \sqrt{x}\theta(x, 0).$$

Proba. É inmediato tomando $\alpha = 0$ e $s = x \in \mathbb{R}$ no anterior lema,

$$\theta\left(\frac{1}{x}, 0\right) = \sqrt{x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} = \sqrt{x}\theta(x, 0).$$

□

Ata o de agora coñecemos expresións analíticas para a función zeta no semiplano Re$s = \sigma > 0$. O seguinte teorema estable as claves para estender dita función ó plano complexo de forma analítica.

Teorema 4.9 (Ecuación funcional da función zeta de Riemann)**.** *Para* $s \neq 0, 1$, *verifícase:*

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{(1-s)}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

Proba. Para $\sigma > 0$ e n un natural, a fórmula integral da función gamma de Euler nos permite escribir:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{s}{2}-1}du,$$

que sen máis que considerar o cambio de variable $u = \pi n^2 y$, obtemos

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 y}\pi^{\frac{s}{2}}n^s y^{\frac{s}{2}-1}dy,$$

é dicir

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)n^{-s} = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 y}y^{\frac{s}{2}-1}dy,\ \ n = 1, 2, \dots .$$

Consecuentemente, para $\sigma > 1$, facendo a suma para $n = 1, 2, \dots$, a anterior igualdade convértese en:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 y}y^{\frac{s}{2}-1}dy \tag{3}$$

Agora, para $y > 0$ temos que:

$$\begin{aligned}\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 y} &= \sum_{n>N}\int_{n-1}^n e^{-\pi n^2 y}du \leq \sum_{n>N}\int_{n-1}^n e^{-\pi u^2 y}du \\ &= \int_N^\infty e^{-\pi u^2 y}du = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\int_{\pi N^2 y}^\infty e^{-v}v^{-\frac{1}{2}}dv,\end{aligned}$$

e esta expresión podémola acoutar de dúas formas:

i)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\int_{\pi N^2 y}^\infty e^{-v}v^{-\frac{1}{2}}dv &\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\int_0^\infty e^{-v}v^{-\frac{1}{2}}dv = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right), \quad (0 < y < 1)\end{aligned}$$

ii)

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\int_{\pi N^2 y}^{\infty} e^{-v}v^{-\frac{1}{2}}dv \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi N^2 y}}\int_{\pi N^2 y}^{\infty} e^{-v}dv$$
$$= -\frac{1}{2\pi N y}\lim_{w\to\infty} e^{-v}\Big|_{\pi N^2 y}^{w} = \frac{e^{-\pi N^2 y}}{2\pi N y} = O\left(e^{-\pi N^2 y}\right), \quad (y\geq 1)$$

É dicir, para $y>0$

$$\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 y} = \text{mín}\left\{O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right), O\left(e^{-\pi N^2 y}\right)\right\}.$$

Tendo presente estas cotas imos xustificar o paso da suma baixo a integral:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 y}y^{\frac{s}{2}-1}dy = \int_0^{\infty}\omega(y)y^{\frac{s}{2}-1}dy.$$

En efecto:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 y}y^{\frac{s}{2}-1}dy = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 y}y^{\frac{s}{2}-1}dy$$
$$= \lim_{N\to\infty}\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} e^{-\pi n^2 y}\right)y^{\frac{s}{2}-1}dy$$
$$= \int_0^{\infty}\omega(y)y^{\frac{s}{2}-1}dy - \lim_{N\to\infty}\int_0^{\infty}\left(\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 y}\right)y^{\frac{s}{2}-1}dy.$$

Bastará ver que

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{\infty}\left(\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 y}\right)y^{\frac{s}{2}-1}dy = 0.$$

Pois ben:

$$\left|\int_0^{\infty}\left(\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 y}\right)y^{\frac{s}{2}-1}dy\right| \leq \int_0^{\infty}\left(\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 y}\right)\left|y^{\frac{s}{2}-1}\right|dy = \int_0^{\infty}\left(\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 y}\right)y^{\frac{\sigma}{2}-1}dy$$
$$\leq \int_0^{\frac{1}{N}}\frac{1}{2\sqrt{y}}y^{\frac{\sigma}{2}-1}dy + \int_{\frac{1}{N}}^{\infty}\frac{e^{-\pi N^2 y}}{2\pi N y}y^{\frac{\sigma}{2}-1}dy$$
$$= \frac{1}{\sigma-1}\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{\sigma-1}{2}} + \frac{1}{2}\pi^{-\frac{\sigma}{2}}N^{-\sigma+1}\int_{\pi N}^{\infty} e^{-v}v^{\frac{\sigma}{2}-2}dv$$
$$\leq \frac{1}{\sigma-1}\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{\sigma-1}{2}} + \frac{1}{2}\pi^{-\frac{\sigma}{2}}N^{-\sigma+1}\int_{1}^{\infty} e^{-v}v^{\frac{\sigma}{2}}dv.$$

A última integral é converxente, (é un caso particular da función gamma), polo tanto pasando límites cando $N \longrightarrow \infty$, resulta:

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{\infty} \left(\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 y} \right) y^{\frac{s}{2}-1} dy = 0,$$

e así o paso baixo a integral queda xustificado.

Recordemos ademais que para $y > 0$ no corolario previo 4.8 vimos que:

$$\theta\left(\frac{1}{y}, 0\right) = \sqrt{y}\theta(y, 0),$$

ou equivalentemente

$$\theta(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \theta\left(\frac{1}{y}\right).$$

Denotando por $\omega(y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 y}$, é claro que $\theta(y) = 2\omega(y) + 1$, e polo tanto

$$2\omega(y) + 1 = \frac{1}{\sqrt{y}} \left[2\omega\left(\frac{1}{y}\right) + 1 \right] \Rightarrow \omega\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} \omega(y) \tag{4}$$

Con isto, o lado dereito de (3) convértese en:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{s}{2}-1} dy &= \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{s}{2}-1} dy = \int_0^{\infty} \omega(y) y^{\frac{s}{2}-1} dy \\ &= \int_0^1 \omega(y) y^{\frac{s}{2}-1} dy + \int_1^{\infty} \omega(y) y^{\frac{s}{2}-1} dy \end{aligned} \tag{5}$$

Para a primeira das integrais da última igualdade en (5) imos considerar o cambio de variable $y = \frac{1}{x}$, e tendo en conta (4), nos queda:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega(y) y^{\frac{s}{2}-1} dy + \int_1^{\infty} \omega(y) y^{\frac{s}{2}-1} dy &= \int_{\infty}^1 \omega\left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{s}{2}-1} \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx + \int_1^{\infty} \omega(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx \\ &= \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-1} \omega\left(\frac{1}{x}\right) dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx \\ &= \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-1} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \omega(x) \right) dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx, \quad \text{(por (4))} \\ &\ \vdots \\ &= -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \int_1^{\infty} \left(x^{-\frac{1+s}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1} \right) \omega(x) dx. \end{aligned}$$

É dicir, (3) realmente é:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \int_1^{\infty} \left(x^{-\frac{1+s}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1} \right) \omega(x) dx \tag{6}$$

Para $s \neq 0, 1$, os dous primeiros sumandos do lado dereito da anterior igualdade representan funcións holomorfas. Finalmente, veremos que a integral converxe uniformemente sobre cada compacto $K \subset \mathbb{C}$, noutras palabras, que a función $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $s \mapsto \int_1^\infty \left(x^{-\frac{1+s}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}\right) \omega(x)dx$, é enteira.

Consideremos a aplicación definida por:

$$f : [1, \infty) \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ f(x, s) = \omega(x) \left(x^{-\frac{1+s}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}\right).$$

Temos que para cada $s \in \mathbb{C}$ a función $f(x, s)$ é enteira para todo $x \in [1, \infty)$.

Sexa $K \subset \mathbb{C}$ un compacto. Entón existirán números reais a, b tales que $b \leq \sigma \leq a$ para calquera que sexa $s \in K$. Así para $s \in K$ e $x \geq 1$, temos que:

$$\left|x^{-\frac{1+s}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}\right| = \left|x^{\frac{1}{2}(1-s)-1} + x^{\frac{s}{2}-1}\right| \leq x^{\frac{1}{2}(1-b)-1} + x^{\frac{a}{2}-1},$$

e tamén,

$$\begin{aligned}\omega(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\pi n x}\right)^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\pi x}\right)^n \\ &= \frac{e^{-\pi x}}{1 - e^{-\pi x}} \leq \frac{e^{-\pi x}}{1 - e^{-\pi}}.\end{aligned}$$

É dicir, $|f(x, s)| \leq \phi(x)$, sendo

$$\phi : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ \phi(x) = \left(x^{\frac{1}{2}(1-b)-1} + x^{\frac{a}{2}-1}\right) \frac{e^{-\pi x}}{1 - e^{-\pi}}.$$

Falta ver que a integral $\int_1^\infty \phi(x)dx$ é converxente, e para elo será suficiente ver que $\int_1^\infty x^c e^{-x}dx < \infty$ calquera que sexa $c \in \mathbb{R}$.

Se $c \leq 0$, temos que:

$$\int_1^\infty x^c e^{-x}dx \leq \int_1^\infty e^{-x}dx = \frac{1}{e} < \infty.$$

Consideremos pois $c > 0$. Neste caso:

$$\int_1^\infty x^c e^{-x}dx \leq \int_0^\infty x^c e^{-x}dx = \int_0^\infty x^{c+1-1} e^{-x}dx = \Gamma(c + 1),$$

e xa vimos no teorema 3.9 da función gamma de Euler que a integral converxe uniformemente.

Consecuentemente, en (6) o lado dereito representa unha función analítica para $s \neq 0, 1$.

Por último notemos que a devandita igualdade

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{(1-s)}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1 - s),$$

se corresponde con facer no lado dereito en (6) o intercambio $s \leftrightarrow 1-s$, o que é posible por prolongación analítica. Isto é,

$$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}=\frac{1}{s(s-1)}=\frac{1}{(1-s)(1-s-1)}=\frac{1}{s^2-s}=\frac{1}{s(s-1)},$$

$$x^{-\frac{1+s}{2}}=x^{-\frac{1+(1-s)}{2}}=x^{\frac{s}{2}-1},$$

$$x^{\frac{s}{2}-1}=x^{\frac{1-s}{2}-1}=x^{-\frac{1+s}{2}},$$

de onde obtemos a xustificación para lograr a ecuación funcional da función zeta de Riemann. □

Nota: A ecuación funcional da función zeta:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{(1-s)}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

pode ser escrita en diferentes modos, por exemplo:

$$\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{1}{2}\pi s\Gamma(s)\zeta(s),$$

a razón atópase na función gamma de Euler, nas súas propiedades. Pode consultarse [8] da bibliografía, por exemplo.

Corolario 4.10. *A función*

$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

é enteira, e ademais

$$\xi(s)=\xi(1-s).$$

Proba. Da ecuación funcional

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=-\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}+\int_1^\infty\left(x^{-\frac{1+s}{2}}+x^{\frac{s}{2}-1}\right)\omega(x)dx,$$

logo

$$\begin{aligned}\xi(s)&=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)\\&=\frac{1}{2}s(s-1)\left(-\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}+\int_1^\infty\left(x^{-\frac{1+s}{2}}+x^{\frac{s}{2}-1}\right)\omega(x)dx\right)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s(s-1)\int_1^\infty\left(x^{-\frac{1+s}{2}}+x^{\frac{s}{2}-1}\right)\omega(x)dx,\end{aligned}$$

e dado que a integral converxe uniformemente, $\xi(s)$ resulta ser enteira porque é suma de funcións enteiras.

Por outra banda, tendo presente a ecuación funcional de zeta

$$\begin{aligned}\xi(1-s) &= \frac{1}{2}(1-s)(-s)\pi^{-\frac{(1-s)}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)\\ &= \frac{1}{2}(s^2-s)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)\\ &= \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)\\ &= \xi(s).\end{aligned}$$

Observemos que esta igualdade pon de manifesto que si s é un cero de $\xi(s)$ entón $1-s$ tamén o é. □

4.3. Ceros triviais e non triviais.

A partir da ecuación funcional

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{(1-s)}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

é doado deducir que $\zeta(-2n)=0$ para $n=1,2,\ldots$, pois

$$\zeta(s) = \pi^{\frac{(2s-1)}{2}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s), \tag{7}$$

pero como

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}s}{\pi},$$

será

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}s}{\pi}\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right),$$

e (7) en realidade é

$$\zeta(s) = \pi^{\frac{(2s-3)}{2}}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}s\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

e como xa dixemos $\zeta(-2n)=0$ para $n=1,2,\ldots$.

Estes ceros denomínanse triviais, e son os únicos tales que $\mathrm{Re}s=\sigma<0$.

Para $s=0$, $\zeta(s)\neq 0$, pois como sabemos $\zeta(s)$ presenta un polo simple en $s=1$, co cal $\zeta(1-s)$ o presentará en $s=0$, e dado que a función $\Gamma(s)$ presenta polos simples en

$s = 0, -1, -2, \dots, -n, \dots$, será $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\zeta(1-s) \neq 0$, ó cancelarse mutuamente o polo simple da función $\zeta(1-s)$ co cero simple da función $\Gamma^{-1}\left(\frac{s}{2}\right)$.

Aparte dos ceros triviais, a función zeta presenta infinitos ceros no que se coñece como banda crítica, $(0 \leq \mathrm{Re} s \leq 1)$, e estes reciben o nome de ceros non triviais.

A continuación tratamos de describir algunhas das características de ditos ceros.

Teorema 4.11. *A función $\xi(s)$ é enteira de orde un que ten infinitos ceros ρ_n na banda crítica. A serie $\Sigma|\rho_n|^{-1}$ diverxe, mentres que a serie $\Sigma|\rho_n|^{-1-\varepsilon}$ converxe para calquera $\varepsilon > 0$. Os ceros de $\xi(s)$ son precisamente os ceros non triviais de $\zeta(s)$.*

Proba. Vexamos que a orde de $\xi(s)$ é un.

Da ecuación funcional da función gamma vista no teorema 3.4 deducimos que

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) = \frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Rightarrow \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{2}{s}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right),$$

e do corolario 4.10 séguese que:

$$\begin{aligned}\xi(s) &= \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)\\ &= (s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\zeta(s).\end{aligned}$$

Veremos primeiramente que a orde de $\xi(s)$ é menor igual que un, é dicir que

$$|\xi(s)| < e^{|s|^{1+\varepsilon}} \forall\, |s| > 0, \tag{8}$$

para calquera $\varepsilon > 0$, pois deste modo a orde será $\leq 1+\varepsilon$, e como isto é para todo $\varepsilon > 0$, a orde será ≤ 1.

Sexa pois $\varepsilon > 0$, e sexa $s \in \mathbb{C}$ tal que $\sigma \geq \frac{1}{2}$ e vexamos que (8) se cumpre en estas condicións.

Dado que $\sigma \geq \frac{1}{2} > 0$ tomando $N = 1$ a expresión de $\zeta(s)$ vista no corolario 4.5 transfórmase en

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + s\int_1^\infty \frac{\rho(u)}{u^{s+1}}du = \frac{s}{s-1} + s\int_1^\infty \frac{[u]-u}{u^{s+1}}du.$$

Así,

$$\begin{aligned}|\zeta(s)| &\leq \frac{|s|}{|s-1|} + |s|\int_1^\infty \frac{|\,[u]-u|}{u^{\sigma+1}}du \leq \frac{|s|}{|s-1|} + |s|\int_1^\infty \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}}\\ &\leq |s| + |s|\int_1^\infty \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = |s| + 2|s| = 3|s| \leq 3e^{|s|},\ \text{se } |s| \geq 2.\end{aligned} \tag{9}$$

Acoutemos agora $|\Gamma(s)|$ para $\sigma \geq \frac{1}{2}$. Da fórmula integral da función gamma vista no teorema 3.9, para $\sigma > 0$ temos que:

$$\begin{aligned}
|\Gamma(s)| &= \left|\int_0^\infty e^{-u}u^{s-1}du\right| \leq \int_0^\infty |e^{-u}u^{s-1}|du = \int_0^\infty e^{-u}u^{\sigma-1}du \\
&= \int_0^1 e^{-u}u^{\sigma-1}du + \int_1^\infty e^{-u}u^{\sigma-1}du \leq \int_0^1 e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}du + \int_1^\infty e^{-u}u^{[\sigma]}du \\
&= \frac{2}{e} + 2\int_0^1 e^{-u}u^{\frac{1}{2}}du + \int_1^\infty e^{-u}u^{[\sigma]}du \leq \frac{2}{e} + 2\int_0^1 e^{-u}du + \int_1^\infty e^{-u}u^{[\sigma]}du \\
&= \frac{2}{e} + 2\left(1 - \frac{1}{e}\right) + \int_1^\infty e^{-u}u^{[\sigma]}du = 2 + \int_1^\infty e^{-u}u^{[\sigma]}du \\
&\leq 2 + \int_0^\infty e^{-u}u^{[\sigma]+1-1}du = 2 + \Gamma([\sigma]+1) = 2 + [\sigma]! \\
&\leq 2 + [\sigma]^{[\sigma]} \leq 2 + [|s|]^{[|s|]} \leq 2 + |s|^{|s|} = 2 + e^{|s|\ln|s|} \\
&\leq 2 + e^{|s||s|^{\frac{\varepsilon}{2}}}, \quad \left(\text{pois } \lim_{|s|\to\infty} \frac{\ln|s|}{|s|^{\frac{\varepsilon}{2}}} = 0\right).
\end{aligned}$$

É dicir, se $|s| > 0$ e $\sigma \geq \dfrac{1}{2}$, será

$$|\Gamma(s)| \leq 2 + e^{|s||s|^{\frac{\varepsilon}{2}}} \leq 2e^{|s|^{1+\frac{\varepsilon}{2}}},$$

e entón de

$$\operatorname{Re}\left(\frac{s}{2}+1\right) = \frac{\sigma}{2} + 1 \geq \frac{1}{4} + 1,$$

e

$$\left|\frac{s}{2}+1\right| \geq \left|\frac{s}{2}\right| - 1 = \frac{|s|}{2} - 1 > 0,$$

deducimos que

$$\left|\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\right| \leq 2e^{\left|\frac{s}{2}+1\right|^{1+\frac{\varepsilon}{2}}},$$

e polo tanto

$$\begin{aligned}
\left|\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\right| &\leq 2e^{\left(\left|\frac{s}{2}\right|+1\right)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \leq 2e^{\left(2\left|\frac{s}{2}\right|\right)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \\
&= 2e^{|s|^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Por outra banda:

$$|\pi^{-\frac{s}{2}}| = \pi^{-\frac{\sigma}{2}} = e^{-\frac{1}{2}\sigma\ln\pi} \leq e^{|s|}, \tag{11}$$

e

$$|s-1| \leq |s| + 1 \leq 2|s| \leq 2e^{|s|} \tag{12}$$

Por conseguinte, tendo presente (9), (10), (11), e (12), para $\sigma \geq \frac{1}{2}$ e $|s| > 0$, resulta que:

$$\begin{aligned}|\xi(s)| &= |s-1||\pi^{-\frac{s}{2}}|\left|\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\right||\zeta(s)| \leq 2e^{|s|}e^{|s|}2e^{|s|^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}3e^{|s|}\\ &= 12e^{3|s|}e^{|s|^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \leq e^{4|s|}e^{|s|^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \leq e^{|s||s|^{\frac{\varepsilon}{2}}}e^{|s|^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} = e^{2|s|^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}\\ &< e^{|s|^{\frac{\varepsilon}{2}}|s|^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} = e^{|s|^{1+\varepsilon}}.\end{aligned}$$

Con isto temos probado a desigualdade (8) para $\sigma \geq \frac{1}{2}$.

Vexamos que para $\sigma \leq \frac{1}{2}$ tamén se verifica.

Resulta que $|\xi(s)| = |\xi(1-s)|$. Ademais

$$\sigma \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{Re}(1-s) = 1-\sigma \geq 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

e

$$|s| > 0 \Rightarrow 0 < |s|-1 \leq |s-1| = |1-s|.$$

Dado $\varepsilon > 0$ podemos considerar $\frac{\varepsilon}{2}$. Entón se $\sigma \leq \frac{1}{2}$ e $|s| > 0$ do xa probado, resulta:

$$\begin{aligned}|\xi(s)| = |\xi(1-s)| &< e^{|1-s|^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \leq e^{(1+|s|)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \leq e^{(2|s|)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}\\ &= e^{2^{1+\frac{\varepsilon}{2}}|s|^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \leq e^{|s|^{\frac{\varepsilon}{2}}|s|^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} = e^{|s|^{1+\varepsilon}}.\end{aligned}$$

Así pois a orde de $\xi(s)$ é menor igual que 1 como queríamos ver.

Para rematar veremos que non pode ser menor que 1.

Temos para $s \in \mathbb{R}$ con $s > 1$, que

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} > 1 \quad \text{e} \quad \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-u}u^{\frac{s}{2}-1}du > 0,$$

co cal

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) > 0,$$

e polo tanto ten sentido aplicar logaritmos á expresión anterior para obter:

$$\ln\xi(s) = \ln\frac{1}{2} + \ln s + \ln(s-1) - \frac{s}{2}\ln\pi + \ln\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) + \ln\zeta(s),$$

e así

$$\frac{\ln\xi(s)}{\frac{1}{2}s\ln s} - \frac{\ln\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\frac{1}{2}s\ln s} = \frac{\ln\dfrac{1}{2}}{\frac{1}{2}s\ln s} + \frac{\ln s}{\frac{1}{2}s\ln s} + \frac{\ln(s-1)}{\frac{1}{2}s\ln s} - \frac{\frac{s}{2}\ln\pi}{\frac{1}{2}s\ln s} + \frac{\ln\zeta(s)}{\frac{1}{2}s\ln s}.$$

Tomando agora límites na anterior igualdade, resulta:

$$\lim_{s\to\infty}\left|\frac{\ln\xi(s)}{\frac{1}{2}s\ln s} - \frac{\ln\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\frac{1}{2}s\ln s}\right| \leq \lim_{s\to\infty}\frac{|\ln\zeta(s)|}{\frac{1}{2}s\ln s} = \lim_{s\to\infty}\frac{\ln\zeta(s)}{\frac{1}{2}s\ln s},$$

pero para $s \geq 2$ xa vimos en (9) que $\zeta(s) = |\zeta(s)| \leq 3|s| = 3s$, co cal

$$\lim_{s\to\infty} \left| \frac{\ln \xi(s)}{\frac{1}{2}s\ln s} - \frac{\ln\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\frac{1}{2}s\ln s} \right| = 0 \tag{13}$$

Por outra banda, para $s > 0$, a fórmula de Stirling vista no teorema 3.11 permítenos escribir:

$$\ln\Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right)\ln s - s + \ln\sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{s}\right).$$

Entón, para $s > 1$, resulta:

$$\left| \frac{\ln\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\frac{1}{2}s\ln s} - \frac{\left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\right)\ln\frac{s}{2}}{\frac{1}{2}s\ln s} + \frac{\frac{s}{2}}{\frac{1}{2}s\ln s} - \frac{\ln\sqrt{2\pi}}{\frac{1}{2}s\ln s} \right| \leq \frac{\frac{2c}{s}}{\frac{1}{2}s\ln s} \longrightarrow 0,$$

cando $s \longrightarrow \infty$, onde $c > 0$ é unha constante.

Séguese que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\ln\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\frac{1}{2}s\ln s} = \lim_{s\to\infty} \left(\frac{\left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\right)(\ln s - \ln 2)}{\frac{1}{2}s\ln s} - \frac{\frac{s}{2}}{\frac{1}{2}s\ln s} + \frac{\ln\sqrt{2\pi}}{\frac{1}{2}s\ln s} + \frac{O\left(\frac{2}{s}\right)}{\frac{1}{2}s\ln s} \right) = 1,$$

e disto e (13) deducimos que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\ln\xi(s)}{\frac{1}{2}s\ln s} = 1.$$

En fin, se a orde de $\xi(s)$ fose $\alpha < 1$, entón existiría un $\mu > 0$ tal que $\alpha < \mu < 1$ e

$$\xi(s) = |\xi(s)| < e^{s^{\mu}},\ \forall\, s > 0.$$

Daquela

$$1 = \lim_{s\to\infty} \frac{\ln\xi(s)}{\frac{1}{2}s\ln s} \leq \lim_{s\to\infty} \frac{s^{\mu}}{\frac{1}{2}s\ln s} = \lim_{s\to\infty} \frac{2}{s^{1-\mu}\ln s} = 0,\ \text{(pois } 1-\mu > 0\text{)}$$

o que é absurdo, polo tanto a orde de $\xi(s)$ debe ser $\alpha = 1$.

Sexa ρ_n a sucesión formada por tódolos ceros de $\xi(s)$ con

$$0 < |\rho_1| \leq |\rho_2| \leq \cdots \leq |\rho_n| \leq \cdots .$$

Dado que $\xi(s)$ é unha función enteira de orde 1, do teorema factorización de Hadamard séguese que $\xi(s)$ admite unha expresión da forma:

$$\xi(s) = e^{g(s)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right) e^{\frac{s}{\rho_n}},$$

onde $g(s)$ é un polinomio de grado ≤ 1. (Nótese que $\rho_n \neq 0$ pois $\xi(0) = \frac{1}{2}$)

Tomemos $g(s) = a + bs$, con $a, b \in \mathbb{C}$.

Pola contra supoñamos que a serie $\Sigma|\rho_n|^{-1}$ é converxente. Entón teríamos que:

$$\begin{aligned}\xi(s) &\leq |e^a||e^{bs}| \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{|s|}{|\rho_n|}\right) e^{\frac{|s|}{|\rho_n|}} \leq |e^a| e^{|b||s|} \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{2|s|}{|\rho_n|}} \\ &= |e^a| e^{|b||s|} e^{2|s| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\rho_n|}} = c e^{c_1 |s|},\end{aligned}$$

onde c, c_1 son números reais positivos.

Pero isto está en contradición ca igualdade obtida con anterioridade

$$\lim_{\substack{s \to \infty \\ s \in \mathbb{R}}} \frac{\ln \xi(s)}{\frac{s}{2} \ln s} = 1.$$

Logo $\Sigma|\rho_n|^{-1}$ diverxe, e consecuentemente $\xi(s)$ ten infinitos ceros ρ_n.

Xa probamos que a serie $\Sigma|\rho_n|^{-1-\varepsilon}$ converxe para calquera $\varepsilon > 0$ nos resultados previos á proba do teorema de Hadamard, concretamente no corolario 2.15.

Vexamos que estes ceros están na banda crítica, $0 \leq \sigma \leq 1$.

Para elo consideremos a expresión xa coñecida:

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = (s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \zeta(s).$$

Agora de

$$\xi(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} s(s-1) \int_1^{\infty} \left(x^{-\frac{1+s}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}\right) \omega(x) dx,$$

séguese que $\frac{1}{2} = \xi(0) = \xi(1)$, logo $\frac{1}{2} = -\Gamma(1)\zeta(0)$, é dicir, $\zeta(0) \neq 0 \neq \zeta(1)$.

A función $\Gamma(s)$ ten polos simples en $n = 0, -1, -2, \dots, -n, \dots$, logo a función $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ tenos en 0 e $s = -2n$ con $n = 1, 2, \dots$. Por outra parte, como os únicos ceros simples de $\zeta(s)$ con $\sigma < 0$ teñen lugar precisamente para $s = -2n$, con $n = 1, 2, \dots$, estes cancélanse mutuamente cos anteriormente mencionados.

Será pois $\xi(s) \neq 0$ para $\sigma < 0$, e como $\xi(s) = \xi(1-s)$ tamén $\xi(s) \neq 0$ para $\sigma > 1$.

Logo os ceros de $\xi(s)$ deben estar na banda crítica.

Así mesmo, na devandita rexión $0 \leq \sigma \leq 1$, a función $s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ ten soamente un cero en $s = 1$, e como sabemos, $\zeta(s)$ ten un polo simple en $s = 1$, logo estes cancélanse mutuamente tamén.

En consecuencia, os ceros de $\zeta(s)$ na banda crítica son precisamente os ceros ρ_n de $\xi(s)$. □

Corolario 4.12. *Existen A, $B \in \mathbb{C}$ tales que*

$$\xi(s) = e^{A+Bs} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right) e^{\frac{s}{\rho_n}}, \ \forall s \in \mathbb{C}$$

Proba. É consecuencia inmediata do teorema de Hadamard, pois dende que $\xi(s)$ e enteira de orde un, admite unha expresión da forma

$$\xi(s) = e^{g(s)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right) e^{\frac{s}{\rho_n}},$$

onde $g(s)$ é un polinomio de grado menor ou igual que un, e ρ_n son os ceros de $\xi(s)$. $\square$

Corolario 4.13. *Os ceros non triviais da función $\zeta(s)$ distribúense simetricamente con respecto das rectas $Res = \sigma = \frac{1}{2}$ e $Ims = t = 0$, e ningún deles é real.*

Proba. Das propiedades elementais de suma e produto de conxugados de complexos, da expresión

$$\xi(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s(s-1)\int_1^{\infty} \left(x^{-\frac{1+s}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}\right)\omega(x)dx,$$

onde $\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$, é doado ver que

$$\overline{\xi(s)} = \xi(\overline{s}).$$

Logo se ρ é un cero non trivial da función $\zeta(s)$, $\overline{\rho}$ tamén debe selo, é dicir, distribúense simetricamente respecto da recta $\mathrm{Im}s = 0$.

Por outra banda, se ρ é un cero de $\xi(s)$, dado que $\xi(s) = \xi(1-s)$, $1 - \overline{\rho}$ tamén debe selo, é dicir, os ceros de $\xi(s)$ distribúense simetricamente respecto da recta $\sigma = \frac{1}{2}$.

Vexamos finalmente que ningún dos ceros ρ_n é real.

Xa que $\frac{1}{2} = \xi(0) = \xi(1)$, será $\rho_n \neq 0, 1$ calquera que sexa n. Bastará ver que $\xi(s) > 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$ tal que $0 < s < 1$.

No teorema 4.9 da ecuación funcional da función zeta de Riemann xa vimos que

$$x^{-\frac{1+s}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1} \leq 2x^{-\frac{1}{2}}, \quad \omega(x) \leq \frac{e^{-\pi x}}{1 - e^{-\pi}},$$

onde debemos entender que está particularizado para o caso que nos ocupa.

Temos pois que:

$$\begin{aligned} c(s) :&= \int_1^{\infty} \left(x^{-\frac{1+s}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}\right)\omega(x)dx \leq \frac{2}{1-e^{-\pi}} \int_1^{\infty} e^{-\pi x} x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &\leq \frac{2}{1-e^{-\pi}} \int_1^{\infty} e^{-\pi x} = \frac{2}{1-e^{-\pi}} \left[\frac{-e^{-\pi x}}{\pi}\right]_1^{\infty} = \frac{2}{1-e^{-\pi}} \cdot \frac{e^{-\pi}}{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi(e^{\pi}-1)} \leq \frac{2}{\pi(2^3-1)} = \frac{2}{7\pi} < 1. \end{aligned}$$

E así $0 \leq c(s) < 1$, e como $0 < s < 1$, será

$$0 \leq sc(s) < 1,$$

ou se se prefire

$$0 \leq \frac{1}{2}sc(s) < \frac{1}{2},$$

pero $s-1<0$, logo

$$0 \geq \frac{1}{2}s(s-1)c(s) > \frac{1}{2}(s-1),$$

e tendo en conta que $s-1>-1$ resulta que

$$0 \geq \frac{1}{2}s(s-1)c(s) > -\frac{1}{2}.$$

Concluímos entón que:

$$\xi(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s(s-1)c(s) > \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

$\square$

En 1859 Riemann conxecturou por primeira vez que se $\zeta(\sigma+it)=0$ con $0 \leq \sigma \leq 1$, entón $\sigma = \frac{1}{2}$. Esta é a coñecida Hipóteses de Riemann, aínda por refutar ou contradicir.

A recta $\sigma = \frac{1}{2}$ denomínase recta crítica.

A continuación estableceremos unha relación entre a derivada logarítmica de $\zeta(s)$ e os seus ceros. Esta relación será fundamental no que resta de traballo.

Teorema 4.14. *Existe un número complexo B_0 tal que*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = B_0 - \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right),$$

onde ρ_n son os ceros non triviais de $\zeta(s)$.

Proba. As igualdades

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = (s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\zeta(s),$$

e

$$\xi(s) = e^{A+Bs}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{\rho_n}\right)e^{\frac{s}{\rho_n}},$$

dan lugar a

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1}\pi^{\frac{s}{2}}\Gamma^{-1}\left(\frac{s}{2}+1\right)e^{A+Bs}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{\rho_n}\right)e^{\frac{s}{\rho_n}},$$

e calculando a derivada logarítmica en ambos membros obtemos:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} + B + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) \tag{14}$$

Por outra banda,

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}},$$

e entón

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} = \frac{1}{\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = e^{\frac{s}{2}\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{2n}\right) e^{-\frac{s}{2n}},$$

que de novo o cálculo da derivada logarítmica produce:

$$-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} = \frac{\gamma}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right). \tag{15}$$

Finalmente substituíndo (15) en (14) obtemos:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\ln\pi + \frac{\gamma}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right) + B + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right).$$

Basta tomar $B_0 = \frac{1}{2}\ln\pi + \frac{\gamma}{2} + B.$ □

Exemplo: Vexamos que $\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \ln 2\pi$.
Para $s \neq 0, 1$ consideremos a ecuación funcional:

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(s)\cos\frac{1}{2}\pi s.$$

Calculando a derivada logarítmica en ambos membros, obtemos:

$$-\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = -\ln 2\pi + \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{2}\pi\tan\frac{1}{2}\pi s.$$

Temos que:

$$-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \lim_{s\to 1}\left(-\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}\right) = -\ln 2\pi + \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} + \lim_{s\to 1}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{2}\pi\tan\frac{1}{2}\pi\right).$$

Vexamos que $\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma$.
Da definición da función gamma de Euler:

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}},$$

e calculando a derivada logarítmica a ambos membros, obtemos:

$$-\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{s} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+n} - \frac{1}{n}\right),$$

logo

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} &= -1-\gamma-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+n}-\frac{1}{n}\right)\\ &= -1-\gamma-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{1+n}\right)\\ &= -1-\gamma+1=-\gamma.\end{aligned}$$

Resta ver que

$$\lim_{s\to 1}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\frac{1}{2}\pi\tan\frac{1}{2}\pi\right)=\gamma.$$

Estudemos a función $\frac{1}{2}\pi\tan\frac{1}{2}\pi$ nunha veciñanza do punto $s=1$.

A función $\cos\frac{1}{2}\pi s$ ten en $s=1$ un cero simple, co cal $\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\pi s}$ ten un polo simple en $s=1$, con residuo:

$$\lim_{s\to 1}\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\pi s}=\lim_{s\to 1}\frac{1}{-\frac{1}{2}\pi\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi s}=-\frac{2}{\pi},$$

en onde na primeira igualdade é consecuencia de que, como o límite existe, para calculalo pódese supoñer que s é real, e entón aplicamos a regra de L'Hôpital.

Así o desenrolo en serie de Laurent en torno a $s=1$ é:

$$\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\pi s}=-\frac{2}{\pi}\frac{1}{s-1}+a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s-1)^n.$$

Como

$$\begin{aligned}a_0 &= \lim_{s\to 1}\left(\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\pi s}+\frac{2}{\pi}\frac{1}{s-1}\right)=\lim_{s\to 1}\frac{s-1+\frac{2}{\pi}\cos\frac{1}{2}\pi s}{s\cos\frac{1}{2}\pi s-\cos\frac{1}{2}\pi s}\\ &= \lim_{s\to 1}\frac{1-\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi s}{\cos\frac{1}{2}\pi s-\frac{1}{2}\pi\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi s+\frac{1}{2}\pi\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi s}\\ &= \lim_{s\to 1}\frac{-\frac{1}{2}\pi\cos\frac{1}{2}\pi s}{-\frac{1}{2}\pi\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi s-\frac{1}{2}\pi\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi s-\frac{1}{4}\pi^2 s\cos\frac{1}{2}\pi s+\frac{1}{4}\pi^2 s\cos\frac{1}{2}\pi s}\\ &= 0,\end{aligned}$$

será

$$\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\pi s}=-\frac{2}{\pi}\frac{1}{s-1}+a_1(s-1)+\cdots.$$

Por outra banda, a serie de Taylor de $\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi s$ en $s=1$ é:

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi s=1-\frac{1}{8}\pi^2(s-1)^2+\cdots.$$

Logo:

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi s}{\cos\frac{1}{2}\pi s} = \frac{-\frac{2}{\pi}}{s-1} + b_1(s-1) + \cdots ,$$

e así

$$\frac{1}{2}\pi \tan\frac{1}{2}\pi s = -\frac{1}{s-1} + c_1(s-1) + \cdots .$$

Polo tanto:

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 1}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{2}\pi\tan\frac{1}{2}\pi\right) &= \lim_{s\to 1}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\pi\tan\frac{1}{2}\pi s - \frac{1}{s-1}\right)\\
&= \lim_{s\to 1}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right) - \lim_{s\to 1}\left(\frac{1}{2}\pi\tan\frac{1}{2}\pi s - \frac{1}{s-1}\right)\\
&= \lim_{s\to 1}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right) = \gamma \quad \text{(como vimos nun exemplo anterior)}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \ln 2\pi.$$

Lema 4.15. *Na rexión $\sigma > 1$ verifícase:*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

onde Λ é a función de Mangoldt.

Proba. Para $\sigma > 1$ en virtude do produto de Euler temos:

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

onde o produto converxe uniformemente sobre cada compacto do semiplano $\sigma > 1$.

Dado que $\zeta(s) \neq 0$ para $\sigma > 1$, calculando a derivada logarítmica á anterior expresión, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= -\sum_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}\frac{1}{p^s}\ln p = -\sum_p (\ln p)\frac{\frac{1}{p^s}}{1-\frac{1}{p^s}}\\
&= -\sum_p \ln p \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{p^{ms}} = -\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln p}{p^{ms}}.
\end{aligned}$$

Sen embargo,

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\sum_{\substack{n=1\\ n=p^m}}^{\infty}\frac{\ln p}{p^{ms}} = -\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln p}{p^{ms}}.$$

$\square$

Lema 4.16. *Verifícase:*

1) *Para un número real $a > 1$ existe unha constante $c = c(a) > 0$ tal que*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right)\right| \leq c\ln(|t|+2),$$

se $-1 \leq \sigma \leq a$.

2) *Para un número real $a > 1$ existe unha constante $c = c(a) > 0$ tal que*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right)\right| \leq c\ln(|t|),$$

se $-1 \leq \sigma \leq a$ e $|t| \geq 2$.

Proba. Probamos 1).

Temos que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right)\right| &= \left|\sum_{n\leq|T|+2}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right)+\sum_{n>|T|+2}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right)\right| \\ &\leq \sum_{n\leq|T|+2}\left(\frac{1}{|s+2n|}+\frac{1}{2n}\right)+\sum_{n>|T|+2}\left(\frac{|s|}{|s+2n|2n}\right) \\ &\leq \sum_{n\leq|T|+2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)+|s|\sum_{n>|T|+2}\frac{1}{n^2} \\ &= 2\sum_{n=1}^{[|T|]+2}\frac{1}{n}+|s|\sum_{[|T|]+3}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \end{aligned} \tag{16}$$

pois $|s+2n| \geq n$ para $n \geq 1$, xa que:

$$|s+2n|^2 = |\sigma+2n+iT|^2 = (\sigma+2n)^2+T^2 \geq (\sigma+2n)^2,$$

e como

$$\sigma \geq -1 \Rightarrow \sigma+2n \geq -1+2n \geq n \Rightarrow (\sigma+2n)^2 \geq n^2,$$

será

$$|s+2n|^2 \geq n^2 \Rightarrow |s+2n| \geq n,$$

e así $\frac{1}{|s+2n|} \leq \frac{1}{n}$, o que xustifica as limitacións feitas.

Vexamos como acoutar en (16) os últimos dous sumandos da última desigualdade:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = 1+\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n} = 1+\sum_{n=2}^{N}\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{n} \leq 1+\int_{1}^{N}\frac{dx}{x} = 1+\ln N.$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=N+1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{n^2}\leq\sum_{n=N+1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^2}=\int_{N}^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{N}.$$

Entón tomando $N=[|t|]+2$, resulta:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right)\right| &\leq 2(1+\ln([|t|]+2))+|s|\frac{1}{[|t|]+2}\leq 2+2\ln([|t|]+2)+\frac{a+|t|}{|t|+1}\\ &=2+2\ln([|t|]+2)+\frac{a-1+|t|+1}{|t|+1}=3+2\ln([|t|]+2)+\frac{a-1}{|t|+1}\\ &\leq 3+2\ln([|t|]+2)+a-1=2+2\ln([|t|]+2)+a\\ &\leq\left(\frac{2+a}{\ln 2}+2\right)\ln([|t|]+2).\end{aligned}$$

Se toma $c=\left(\frac{2+a}{\ln 2}+2\right)$, e obviamente $c>0$ porque se $0\leq c$ será $a\leq -2$, en calquera caso está en contradición cas hipóteses, pois $-1\leq\sigma\leq a$, e así $c>0$.

Probamos 2).

Para $|t|\geq 2$, polo anteriormente visto, temos que:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right)\right| &\leq c\ln(|t|+2)\leq c\ln(|t|+|t|)=c\ln(2|t|)\\ &=c\ln 2+c\ln|t|\leq c\ln|t|+c\ln|t|=2c\ln|t|.\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 4.17. *Sexan $\rho_n=\beta_n+i\gamma_n$, con $n=1,2,\ldots$, os ceros non triviais de $\zeta(s)$, e sexa $T\geq 2$. Entón:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2}\leq c\ln T.$$

Proba. A expresión da derivada logarítmica da función $\zeta(s)$ vista no teorema 4.14, permítenos escribir:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=-B_0+\frac{1}{s-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right).$$

Sexa $T\geq 2$ e $s=2+iT$.

Entón polo lema previo 4.16 temos que:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right)\right|\leq c_1\ln|T|,$$

e como,

$$\mathrm{Re}\frac{1}{s-1}=\frac{\mathrm{Re}(s-1)}{|s-1|^2}=\frac{1}{1+T^2}\leq 1,$$

debe existir $c_2 > 0$ tal que

$$-\mathrm{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \leq c_2 \ln T - \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right). \tag{17}$$

Agora, apoiándonos no lema 4.15, resulta:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &\leq \left|\mathrm{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^2} \text{ (pois } \sigma = 2) \\
&= -\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} = c_3 > 0.
\end{aligned}$$

Logo, disto último e (17) deducimos que

$$\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) \leq \mathrm{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + c_2 \ln T \leq c_3 + c_2 \ln T \leq c_4 \ln T,$$

para algún $c_4 > 0$ independente de T.

Para rematar observemos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{s-\rho_n}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\rho_n}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{2-\beta_n}{(2-\beta_n)^2 + (T-\gamma_n)^2} - i\frac{\gamma_n}{(2-\beta_n)^2 + (T-\gamma_n)^2}\right) + \\
&+ \mathrm{Re}\left(\frac{\beta_n}{\beta_n^2 + \gamma_n^2} - i\frac{\gamma_n}{\beta_n^2 + \gamma_n^2}\right) = \frac{2-\beta_n}{(2-\beta_n)^2 + (T-\gamma_n)^2} + \frac{\beta_n}{\beta_n^2 + \gamma_n^2} \\
&\geq \frac{2-\beta_n}{(2-\beta_n)^2 + (T-\gamma_n)^2} \geq \frac{1}{4 + (T-\gamma_n)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{1 + \frac{(T-\gamma_n)^2}{4}} \\
&\geq \frac{\frac{1}{4}}{1 + (T-\gamma_n)^2},
\end{aligned}$$

e polo tanto

$$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1 + (T-\gamma_n)^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) \leq c_4 \ln T.$$

Basta tomar $c = 4c_4$. □

Corolario 4.18. *O número de ceros non triviais da función zeta que verifiquen $T \leq |Im\rho_n| \leq T + 1$ non exceden $c \ln T$.*

Proba. Sexa $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ tal que $T \leq |\mathrm{Im}\rho_n| \leq T+1$.

Posto que

$$\mathrm{Im}\rho_n \leq |\mathrm{Im}\rho_n| \leq T+1,$$

de

$$|1 + (T-\gamma_n)|^2 = 1 + (T-\gamma_n)^2 \geq 1 + (T-(T+1))^2 = 2,$$

séguese que

$$\frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Disto último e aplicando o resultado obtido no teorema previo, resulta:

$$\begin{aligned}\sum_{T\leq|\mathrm{Im}\rho_n|\leq T+1} 1 &\leq 2 \sum_{T\leq|\mathrm{Im}\rho_n|\leq T+1} \frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2} \\ &\leq 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2} \leq 8c_4 \ln T.\end{aligned}$$

Basta tomar $c = 8c_4$. □

Corolario 4.19. *Para $T \geq 2$ tense que*

$$\sum_{|T-\gamma_n|>1} \frac{1}{(T-\gamma_n)^2} \leq c \ln T.$$

Proba. Temos que:

$$\begin{aligned}|T-\gamma_n| > 1 \Rightarrow |T-\gamma_n|^2 = (T-\gamma_n)^2 > 1 \Rightarrow 2(T-\gamma_n)^2 > 1 + (T-\gamma_n)^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{2(T-\gamma_n)^2} < \frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2},\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{|T-\gamma_n|>1} \frac{1}{(T-\gamma_n)^2} &\leq \sum_{|T-\gamma_n|>1} \frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2} \leq c' \ln T \text{ (como xa vimos).}\end{aligned}$$

O resultado obtense sen máis que tomar $c = 2c'$. □

Corolario 4.20. *Para $s = \sigma + it$, onde $-1 \leq \sigma \leq 2$ e $|t| \geq 2$, se verifica a seguinte igualdade*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1} \frac{1}{s-\rho_n} + O(\ln t).$$

Proba. Considerando as expresións da derivada logarítmica da función zeta seguintes

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = B_0 - \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right),$$

$$\frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)} = B_0 - \frac{1}{1+it} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2+it-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2+it+2n} - \frac{1}{2n}\right).$$

Restando ambas resulta

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{1+it} + + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right) - + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2+it+2n} - \frac{1}{2n}\right) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} - \frac{1}{2+it-\rho_n}\right) + \frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)}. \tag{18}$$

No lema 4.16 vimos que:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right)\right| \leq c\ln|t| = c\ln t,$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2+it+2n} - \frac{1}{2n}\right)\right| \leq c\ln|t| = c\ln t.$$

Ademais,

$$|1+it| \geq |t| - 1 = t - 1,$$

logo

$$\frac{1}{|1+it|} \leq \frac{1}{t-1} \leq 1, \text{ (pois } |t| \geq 2)$$

e como $-1 \leq \sigma \leq 2$, será

$$\left|-\frac{1}{s-1}\right| = \left|\frac{1}{(\sigma-1)+it}\right| \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{2}.$$

E polo lema 4.15 para $\sigma > 1$ resulta:

$$\left|\frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{2+it}}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\Lambda(n)}{n^{2+it}}\right|$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^2} = -\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}.$$

Por conseguinte (18) convértese en:

$$\begin{aligned}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}-\frac{1}{2+it-\rho_n}\right)+O(\ln t)\\ &= \sum_{|t-\gamma_n|>1}\left(\frac{1}{s-\rho_n}-\frac{1}{2+it-\rho_n}\right)+\sum_{|t-\gamma_n|\le 1}\left(\frac{1}{s-\rho_n}-\frac{1}{2+it-\rho_n}\right)+O(\ln t). \quad (19)\end{aligned}$$

Sen embargo,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{s-\rho_n}-\frac{1}{2+it-\rho_n}\right| &= \frac{2-\sigma}{|(s-\rho_n)(2+it-\rho_n)|}\\ &= \frac{2-\sigma}{|(\sigma-\beta_n)+i(t-\gamma_n)||(2-\beta_n)+i(t-\gamma_n)|}\\ &\le \frac{2-\sigma}{|(t-\gamma_n)||(t-\gamma_n)|}\ (\text{pois } |\mathrm{Im} z|\le|z|)\\ &= \frac{2-\sigma}{(t-\gamma_n)^2}\le\frac{3}{(t-\gamma_n)^2},\end{aligned}$$

e tendo presente isto último e o corolario 4.19, resulta

$$\sum_{|t-\gamma_n|>1}\left|\frac{1}{s-\rho_n}-\frac{1}{2+it-\rho_n}\right|\le 3\sum_{|t-\gamma_n|>1}\frac{1}{(t-\gamma_n)^2}\le 3c'\ln t,$$

e así (19) é

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{|t-\gamma_n|\le 1}\left(\frac{1}{s-\rho_n}-\frac{1}{2+it-\rho_n}\right)+O(\ln t) \quad (20)$$

Máis aínda, como

$$\frac{1}{|2+it-\rho_n|}\le\frac{1}{2-\beta_n}\le 1\ \ (\text{pois } |\mathrm{Re} z|\le|z|),$$

será

$$\left|\sum_{|t-\gamma_n|\le 1}\frac{1}{2+it-\rho_n}\right|\le\sum_{|t-\gamma_n|\le 1}\frac{1}{|2+it-\rho_n|}\le\sum_{|t-\gamma_n|\le 1}1=O(\ln t),$$

como vimos no corolario 4.18.

Así pois, de (20) obtemos o desexado:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{|t-\gamma_n|\le 1}\frac{1}{s-\rho_n}+O(\ln t).$$

□

Lema 4.21. *Sexan* $s_n := \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ *e* $0 < a \leq \frac{\pi}{4}$ *un número real fixo. Sexa*

$$D := \mathbb{C} - \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B(s_n, a).$$

Verifícase que a función $\tan(s)$ *está acoutada en* D.

Proba. Tendo presente a relación elemental

$$\cos^2 s + \operatorname{sen}^2 s = 1,$$

de

$$\begin{aligned} |\tan s|^2 &= \frac{|\operatorname{sen} s|^2}{|\cos s|^2} = \frac{|\operatorname{sen}^2 s|}{|\cos s|^2} = \frac{|1 - \cos^2 s|}{|\cos s|^2} \\ &\leq \frac{1 + |\cos^2 s|}{|\cos s|^2} = 1 + \frac{1}{|\cos s|^2}, \end{aligned}$$

concluímos que

$$|\tan s| \leq \sqrt{1 + \frac{1}{|\cos s|^2}}.$$

Bastará pois ver que existe $M = M(a) > 0$ tal que $|\cos s| \geq M$ para calquera $s \in D$. Se $s \in \mathbb{C}$, sabemos:

$$\cos s = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{s^{2n}}{(2n)!}, \quad \operatorname{sen} s = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{s^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Sexa $t \in \mathbb{R}$. Entón para $s = it$, temos:

$$\cos(it) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \quad \operatorname{sen}(it) = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

en fin, para $s = \sigma + it$:

$$\begin{aligned} \cos s &= \cos(\sigma + it) = \cos\sigma \cos(it) - \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}(it) = \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \right) \cos\sigma - i \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \operatorname{sen}\sigma, \end{aligned}$$

de onde

$$\operatorname{Re}\cos s = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \right) \cos\sigma \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}\cos s = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \operatorname{sen}\sigma.$$

Temos que:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\right|\geq 1 \quad \text{e} \quad \left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| = |t|\left|1+\frac{t^2}{3!}+\cdots\right|\geq |t|,$$

e así

$$|\mathrm{Re}\cos s|\geq|\cos\sigma| \quad \text{e} \quad |\mathrm{Im}\cos s|\geq|t||\operatorname{sen}\sigma|.$$

Agora, é claro que existe $A>0$ tal que $|\cos\sigma|\geq A$ se $|\sigma-s_n|\geq a^2\ \forall n\in\mathbb{Z}$, e tamén existe $B>0$ tal que $|\operatorname{sen}\sigma|\geq B$ se $|\sigma-s_n|<a^2$ para algún $n\in\mathbb{Z}$.

Sexa $s\in D$. Entón $|s-s_n|=|(\sigma-s_n)+it|\geq a\ \forall n\in\mathbb{Z}$.

Poden ocorrer dous casos:

1) Que:

$$|\sigma-s_n|\geq a^2\ \ \forall n\in\mathbb{Z}\Rightarrow|\cos\sigma|\geq A\Rightarrow|\mathrm{Re}\cos s|\geq A\Rightarrow|\cos s|\geq A.$$

2) Se $|\sigma-s_n|<a^2$ para algún $n\in\mathbb{Z}$, entón $|\operatorname{sen}s|\geq B$.

   Ademais, neste segundo caso:

$$|\sigma-s_n|<a^2\Rightarrow(\sigma-s_n)^2<a^4,$$

   e como

$$|(\sigma-s_n)+it|\geq a\Rightarrow|(\sigma-s_n)+it|^2\geq a^2\Rightarrow(\sigma-s_n)^2+t^2\geq a^2,$$

   estas dúas permiten deducir:

$$a^4+t^2>(\sigma-s_n)^2+t^2\geq a^2\Rightarrow t^2\geq a^2-a^4\Rightarrow|t|\geq\sqrt{a^2-a^4}=a\sqrt{1-a^2}.$$

   Polo tanto, neste segundo caso:

$$|\mathrm{Im}\cos s|\geq a\sqrt{1-a^2}B\Rightarrow|\cos s|\geq a\sqrt{1-a^2}B.$$

   Tómase $M=\text{mín}\left\{A,a\sqrt{1-a^2}B\right\}$.

$\square$

Proposición 4.22. *Verifícase:*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=O(\ln 2|s|),$$

se $\sigma\leq-1$ *e se* s *non está en ningún dos círculos pechados de radio* $\frac{1}{2}$ *con centro nun cero trivial* $-2n$ *de* $\zeta(s)$.

Proba. Cambiando $s \longleftrightarrow 1-s$, é suficiente probar que:

$$\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = O(\ln 2|1-s|).$$

Supoñendo que $\mathrm{Re}(1-s) \leq -1$ e $|1-s+2n| > \frac{1}{2}$, $\forall\, n = 1, 2, \ldots$. Denotaremos por S a tal rexión de $\mathbb{C}$.

Consideremos a ecuación funcional de $\zeta(s)$ escrita no seguinte xeito:

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(s)\cos\frac{\pi}{2}s.$$

Calculando a derivada logarítmica:

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} &= -\ln 2 - \ln\pi + \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi}{2}s \\ &= -\ln 2\pi + \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi}{2}s, \end{aligned}$$

co cal

$$\left|\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}\right| \leq \ln 2\pi + \left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right| + \left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| - \frac{\pi}{2}\left|\tan\frac{\pi}{2}s\right|.$$

Tratemos buscar limitacións adecuadas para cada sumando do lado dereito da desigualdade no conxunto S.

Para $\left|\tan\frac{\pi}{2}s\right|$ polo lema previo 4.21, con $a = \frac{\pi}{4}$, é suficiente probar que:

$$\left|\frac{\pi}{2}s - \frac{\pi}{2} - n\pi\right| > \frac{\pi}{4} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z} \quad \text{se} \quad s \in S,$$

é dicir

$$|s-1-2n| > \frac{1}{2} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z} \quad \text{se} \quad s \in S.$$

Para $n = 1, 2, \ldots$, isto é obvio, pola definición de S. Para $n = 0, -1, -2. \ldots$, tamén se verifica, pois se $s \in S$, será $\mathrm{Re}(s-1) \geq 1$ e ademais $-2n \geq 0$ e así:

$$|s-1-2n| \geq |\mathrm{Re}(s-1-2n)| = |\mathrm{Re}(s-1) - 2n| \geq 1.$$

Co cal $\left|\tan\frac{\pi}{2}s\right|$ está limitada en S.

Para $\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|$, dado que $\mathrm{Re}(s-1) \leq -1$ equivale a que $\mathrm{Re}s \geq 2$, da relación vista no lema 4.16:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

obtemos

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{|n^s|} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^2} = -\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}.$$

Por último, para $\left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right|$ na rexión Re$s \geq 2$, como vimos no corolario 3.17:

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \ln s - \frac{1}{2s} + O\left(\frac{1}{|s|^2}\right).$$

Como Re$s \geq 2$, resulta:

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = +O\left(\ln |s|\right).$$

Ademais:

$$\mathrm{Re} s \geq 2 \Rightarrow |s| \geq 2 \Rightarrow |s| - 2 \geq 0 \Rightarrow 2|s| - 2 \geq |s|,$$

e tamén

$$|s| = |1 - 1 + s| \leq 1 + |s - 1| = 1 + |1 - s| \Rightarrow |s| - 1 \leq |1 - s| \Rightarrow 2|s| - 2 \leq 2|1 - s|,$$

e das dúas anteriores deducimos

$$|s| \leq 2|1 - s|,$$

co cal

$$\ln |s| \leq \ln 2|1 - s|,$$

que finalmente

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = O\left(\ln 2|1 - s|\right).$$

Conclusión:

$$\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = O(\ln 2|1 - s|),$$

na rexión indicada. □

4.4. O teorema De la Vallée-Poussin.

O seguinte teorema é importante no senso que delimita unha rexión, dentro da banda crítica, no que a función zeta non encontra ceros.

Teorema 4.23 (De la Vallée-Poussin)**.** *Existe unha constante absoluta $c > 0$ tal que na rexión*

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{\ln(|t| + 2)}$$

a función zeta é libre de ceros.

Proba. Para a demostración usaremos a seguinte relación fundamental.

Para $\theta \in \mathbb{R}$ temos:

$$\begin{aligned} 0 \leq 2(1 + \cos\theta)^2 &= 2 + 2\cos^2\theta + 4\cos\theta = 2 + (1 + \cos 2\theta) + 4\cos\theta \\ &= 3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta, \end{aligned}$$

isto é,

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta \geq 0, \ \forall\, \theta \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

Tamén vimos no lema 4.15 que na rexión $\sigma > 1$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

e entón, para $\sigma > 1$ deducimos:

$$\begin{aligned}
3\left[-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\right] + 4\left[-\mathrm{Re}\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right] + \left[-\mathrm{Re}\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right] &= \\
= 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}} + \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+2it}}& \\
= 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}e^{it\ln n}} + \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}e^{i2t\ln n}}& \\
= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}\left(3 + 4\cos(t\ln n) + \cos(2t\ln n\right) \geq 0, \ (\text{por } (*))& \qquad (21)
\end{aligned}$$

Supoñamos polo momento que $1 < \sigma \leq 2$ e busquemos limitacións apropiadas para os tres sumandos do primeiro membro de (21).

Se $s = \sigma$, da expresión da derivada logarítmica, en virtude de lema 4.16 e o corolario 4.18, temos que:

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = \frac{1}{\sigma-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sigma-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) + O(\ln 2) < \frac{1}{\sigma-1} + B_1, \qquad (22)$$

onde $B_1 > 0$ é unha constante absoluta.

Para $s = \sigma + it$, dado que os ceros non triviais da función zeta están todos fóra do eixo real, e son illados, por ser $\zeta(s)$ holomorfa salvo eventualmente en dito punto, existe unha constante $a_1 > 0$ de xeito que ningún dos ceros está na rexión $|t| \leq a_1$.

Imos supoñer a partir de aquí que $|t| > a_1$.

Entón:

$$\mathrm{Re}\frac{1}{s-1} = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2} \leq \frac{\sigma-1}{t^2} < \frac{1}{a_1^2}.$$

Ademais, novamente da aplicación do lema 4.16 existirá unha constante $B_2 > 0$ tal que:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right)\right| \leq B_2\ln(|t|+2).$$

Polo tanto substituíndo estas dúas últimas desigualdades na expresión da derivada logarítmica, para o noso caso particular, obtemos:

$$-\mathrm{Re}\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} < B' + B_2\ln(|t|+2) - \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right),$$

onde $B' > 0$.

Tomemos $B'' > 0$ de xeito que $B' \leq B'' \ln(a_1 + 2)$. Entón:

$$B' \leq B'' \ln(a_1 + 2) \leq B'' \ln(|t| + 2),$$

e así

$$-\mathrm{Re}\frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} < B_3 \ln(|t| + 2) - \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{s - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right), \tag{23}$$

onde $B_3 = B'' + B_2$, $s = \sigma + it$, con $1 < \sigma \leq 2$ e $|t| > a_1$.

Finalmente para $s = 2 + it$ notemos que

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{s - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) = \frac{\sigma - \beta_n}{|s - \rho_n|^2} + \frac{\beta_n}{|\rho_n|^2} > 0,$$

e como $0 \leq \beta_n \leq 1$, resulta

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{s - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) \leq 0,$$

e así de (23) obtemos a seguinte cota para o terceiro sumando do primeiro membro de (21),

$$-\mathrm{Re}\frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)} < B_3 \ln(|2t| + 2) \leq 2B_3 \ln(|t| + 2). \tag{24}$$

Consideremos agora que $\rho = \beta + i\gamma$ un cero non trivial de $\zeta(s)$ que será fixo no que segue. De (23) deducimos que

$$\begin{aligned}-\mathrm{Re}\frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} &< B_3 \ln(|t| + 2) - \mathrm{Re}\frac{1}{s - \rho_n} \\ &= B_3 \ln(|t| + 2) - \frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta) + (t - \gamma)^2},\end{aligned} \tag{25}$$

obtendo así unha cota para o segundo membro de (21).

Polo tanto de (21), (22), (24) e (25) obtemos que:

$$0 < \frac{3}{\sigma - 1} + 3B_1 + 4B_3 \ln(|t| + 2) - 4\frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta) + (t - \gamma)^2} + 2B_3 \ln(|t| + 2),$$

e así, existirá unha constante absoluta $B_4 > 0$ tal que se $1 < \sigma \leq 2$ e $|t| > a_1$, e ρ é un cero dado non trivial de $\zeta(s)$, entón

$$0 < \frac{3}{\sigma - 1} - 4\frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} + B_4 \ln(|t| + 2),$$

ou mellor,

$$4\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2}<\frac{3}{\sigma-1}+B_4\ln(|t|+2).$$

A partir de aquí a restrición de $\sigma\leq 2$ pode ser suprimida, aumentando se fose preciso o valor de B_4, xa que

$$4\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2}\leq\frac{4}{\sigma-\beta}<4\quad\text{se }\sigma>2.$$

Pola elección de a_1 tense que $|\gamma|>a_1$, e entón tomando $t=\gamma$, séguese que:

$$\frac{4}{\sigma-\beta}-\frac{3}{\sigma-1}<B_4\ln(|\gamma|+2)\quad\forall\,\sigma>1. \tag{26}$$

Observemos primeiramente que da expresión anterior deducimos que $\beta<1$, pois se $\beta=1$, sería

$$\lim_{\sigma\to 1^+}\frac{4}{\sigma-\beta}-\frac{3}{\sigma-1}=\infty,$$

o que é absurdo, logo $\beta<1$.

Entón dado $\lambda>0$, para cada $\sigma>1$, podemos escribir $\sigma=1+\lambda(1-\beta)$, e así a desigualdades (26) é agora

$$\left(\frac{4}{1+\lambda}-\frac{3}{\lambda}\right)\frac{1}{1-\beta}<B_4\ln(|\gamma|+2).$$

Agora para $\lambda>0$ suficientemente grande, a expresión entre parénteses do lado esquerdo resulta ser positiva, concretamente

$$\begin{aligned}\left(\frac{4}{1+\lambda}-\frac{3}{\lambda}\right)>0\Leftrightarrow\frac{4}{1+\lambda}>\frac{3}{\lambda}&\Leftrightarrow\lambda-\frac{3}{4}\lambda>\frac{3}{4}\\&\Leftrightarrow\lambda>3.\end{aligned}$$

Así por exemplo para $\lambda=4$, obtemos:

$$\beta<1-\frac{c_1}{\ln(|\gamma|+2)},$$

onde $c_1=\frac{1}{20B_4}$.

Ata aquí probamos que se $\rho=\beta+i\gamma$ é un cero non trivial de $\zeta(s)$, entón:

$$\beta<1-\frac{c_1}{\ln(|\gamma|+2)}.$$

Modificaremos agora a constante c_1 para que englobe tamén ós ceros triviais.

Sexa $c:=\text{mín}\{c_1,2\ln 2\}$. Para os ceros non triviais verifícase:

$$\beta<1-\frac{c_1}{\ln(|\gamma|+2)}\leq\beta<1-\frac{c}{\ln(|\gamma|+2)}.$$

Para os ceros triviais $s = -2n$, con $n \geq 1$, resulta que $\sigma = -2n$ e $t = 0$ e de $0 \leq \beta < 1$ resulta:

$$\sigma \leq -2 < 1 - \frac{2 \ln 2}{\ln 2} \leq 1 - \frac{2 \ln 2}{\ln(|\gamma| + 2)} \leq 1 - \frac{c}{\ln(|\gamma| + 2)},$$

co que concluímos. $\square$

Capítulo 5

O Teorema do número primo

5.1. A función de Chebyshev.

Para un número real positivo $x \geq 2$ a función de contar números primos é

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1,$$

que como é doado interpretar ven a contar os números primos p menores ou iguais ca x.

Chebyshev estableceu que existen constantes absolutas positivas c_1 e c_2 tales que

$$c_1 \frac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq c_2 \frac{x}{\ln x},$$

é dicir,

$$c_1 \leq \frac{\pi(x)}{x/\ln x} \leq c_2.$$

De feito calculo esas constantes, c_1 era un valor moi próximo a un e c_2 excedía un pouco a un. Isto levoulle a conxecturar que se o límite de $\frac{\pi(x)}{x/lnx}$ existe cando $x \longrightarrow \infty$, entón deber ser un, isto é

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1.$$

No ano 1848 probou tal conxectura, e o que se coñece como teorema de Chebyshev.

Tal conxectura coñécese hoxe en día como o Teorema dos Números Primos, que mostraremos. De feito obteremos un resultado máis forte, mostraremos que existe unha constante absoluta $c > 0$ tal que

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O\left(xe^{\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}}\right).$$

Para estudar a función $\pi(x)$ estudaremos unha función que está estritamente relacionada con ela: *a función ψ de Chebyshev.*

Definición 5.1. Para un número real positivo, a función

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n),$$

onde Λ é a función de Mangoldt, denomínase función de Chebyshev.

A seguinte proposición establece as claves da relación existente entre as funcións $\pi(x)$ e $\psi(s)$.

Proposición 5.2. *Verifícase:*

1) $\psi(x) \leq \pi(x) \ln x$ *se* $x > 1$,

2) Se $x > 1$ *e* $0 < \lambda < 1$, *entón* $\psi(x) \geq \lambda \left(\pi(x) - x^{\lambda}\right) \ln x$,

3) $\text{lím}_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{\pi(x)}{x/lnx} = 1 \Leftrightarrow \text{lím}_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{\psi(x)}{x} = 1.$

Proba. Probamos 1).

Temos que:

$$\psi(x) = \sum_{p^k \leq x} \ln p = \sum_{p \leq x} \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right] \ln p,$$

onde a segunda igualdade é consecuencia de que para un p dado, o sumando $\ln p$ repítese $\left[\frac{\ln x}{\ln p}\right]$ veces, pois:

$$p^k \leq x \Leftrightarrow k \ln p \leq \ln x \Leftrightarrow k \leq \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right].$$

Así pois:

$$\psi(x) = \sum_{p^k \leq x} \ln p \leq \sum_{p \leq x} \frac{\ln x}{\ln p} \ln p = \sum_{p \leq x} \ln x = \pi(x) \ln x.$$

Probamos 2).

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{p^k \leq x} \ln p \geq \sum_{p \leq x} \ln p \geq \sum_{x^{\lambda} < p \leq x} \ln p \\ &\geq (\pi(x) - \pi(x^{\lambda})) \ln x^{\lambda} \geq (\pi(x) - x^{\lambda}) \ln x^{\lambda} \\ &= \lambda(\pi(x) - x^{\lambda}) \ln x.\end{aligned}$$

Probamos 3).

$(\Leftarrow)$

$$\begin{aligned}\psi(x) \leq \pi(x) \ln x \Rightarrow \frac{\psi(x)}{x} &\leq \frac{\pi(x) \ln x}{x} = \frac{\pi(x)}{x/\ln x} \\ &\Rightarrow 1 = \lim_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq \lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x}.\end{aligned}$$

Por outra parte:

$$\psi(x) \geq \lambda(\pi(x) - x^{\lambda}) \ln x \Rightarrow \frac{\psi(x)}{x} \geq \lambda \left(\frac{\pi(x)}{x} - x^{\lambda-1} \right) \ln x$$
$$= \lambda \frac{\pi(x)}{x/\ln x} - \lambda x^{\lambda-1} \ln x.$$

Sen embargo, para $0 < \lambda < 1$, resulta

$$\lim_{x\to\infty} \lambda x^{\lambda-1} \ln x = \lim_{x\to\infty} \frac{\lambda \ln x}{x^{1-\lambda}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\lambda x^{-1}}{(1-\lambda)x^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{1-\lambda} \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\lambda}}{x} = 0, \quad \text{(L'Hôpital)}$$

logo

$$1 = \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \geq \lambda \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x},$$

e como a anterior desigualdade é válida par calquera $\lambda < 1$, en realidade

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} \leq 1,$$

e con isto probamos a primeira implicación.

($\Rightarrow$)

Sen entrar en repeticións:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1.$$

Bastará ver que $1 \leq \lim_{x\to\infty} \dfrac{\psi(x)}{x}$.

Pero

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \geq \lambda \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = \lambda,$$

logo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

□

Tamén hai unha igualdade que relaciona a función de Chebyshev ca expresión da derivada logarítmica da función zeta. Mostrámola a continuación.

Proposición 5.3. *Para $\sigma > 1$, verifícase:*

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^{\infty} \psi(x) \frac{dx}{x^{s+1}}.$$

Proba. Recordemos que

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n),$$

e para $\sigma > 1$, tamén vimos no lema 4.15 que

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Apliquemos a identidade de Abel vista no lema 1.13 con $a = 1$, $b > 1$ un real, $c_n = \Lambda(n)$, $f(x) = \frac{1}{x^s}$, e $c(x) = \sum_{1<n\leq b} \Lambda(n) = \psi(x)$.

Entón:

$$\sum_{1\leq n\leq b} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{1<n\leq b} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = s \int_1^b \psi(x) \frac{dx}{x^s + 1} + \psi(b) \frac{1}{b^s}.$$

Bastará ver que $\psi(b)\frac{1}{b^s} \longrightarrow 0$ cando $b \longrightarrow \infty$, e tomando límites na igualdade previa haberíamos rematado.

Pois ben, como

$$\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^k \leq x} \ln p \leq x \ln x, \quad \text{(pola proposición 5.2)}$$

para $\sigma > 1$, será

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \left| \frac{\psi(x)}{x^s} \right| &= \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x^\sigma} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{x \ln x}{x^\sigma} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{\sigma-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-1}}{(\sigma-1)x^{\sigma-2}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(\sigma-1)x^{\sigma-1}} = 0. \end{aligned}$$

Polo tanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x^s} = 0.$$

□

5.2. A fórmula explícita da función de Chebyshev

O obxectivo desta sección é representar á función de Chebyshev como suma sobre os ceros da $\zeta(s)$.

O métodos de integración complexa permiten escribir fórmulas explícitas que conectan os diversos tipos de sumas sobre os números primos cos ceros da función zeta. Mostraremos unha destas fórmulas. Para elo será preciso o seguinte lema.

Lema 5.4. *Para $a > 0$, $b > 0$ e $T > 0$, sexan:*

$$I(a,T) := \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s}{s}ds \quad e \quad \delta(a) := \begin{cases} 0 & se\ 0 < a < 1, \\ \frac{1}{2} & se\ a = 1, \\ 1 & se\ a > 1. \end{cases}$$

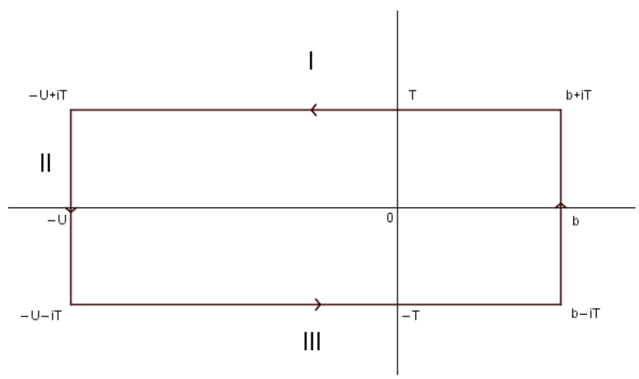
Entón:

$$|I(a,T) - \delta(a)| \le \begin{cases} a^b \text{mín}\{1, T^{-1}|\ln a|^{-1}\} & se\ a \neq 1, \\ bT^{-1} & se\ a = 1. \end{cases}$$

Proba. Distinguiremos os casos.

Caso $a > 1$.

Sexa $U > b$ con $U > 1$ e consideremos o contorno rectangular Γ da figura adxunta:



Tomando $f(s) = \frac{a^s}{s}$ resulta que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} - \{0\})$ e ademais presenta en $s = 0$ un polo simple. Dado que $\text{Res}(f, 0) = 1$, o teorema dos residuos permítenos escribir:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{a^s}{s}ds = 1,$$

ou equivalentemente,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s}{s}ds = 1 - \frac{1}{2\pi i}\int_I \frac{a^s}{s}ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{II} \frac{a^s}{s}ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{III} \frac{a^s}{s}ds.$$

Calculando cada integral ó longo do seu respectivo segmento (camiño), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_I \frac{a^s}{s}ds &= -\int_{-U+iT}^{b+iT} \frac{a^s}{s}ds = -\int_{-U}^{b} \frac{a^{\tau+iT}}{\tau+iT}d\tau \\ &\Rightarrow \left|\int_I \frac{a^s}{s}ds\right| \le \int_{-U}^{b} \frac{|a^{\tau+iT}|}{|\tau+iT|}d\tau = \int_{-U}^{b} \frac{a^\tau}{|\tau+iT|}d\tau \\ &\le \frac{1}{T}\int_{-U}^{b} a^\tau d\tau = \frac{1}{T}\left[\frac{a^\tau}{\ln a}\right]_{-U}^{b} = \frac{1}{T}\left(\frac{a^b}{\ln a} - \frac{a^{-U}}{\ln a}\right), \end{aligned}$$

onde τ entenderemos que é o parámetro que determina o camiño, neste caso $\varphi(\tau) = \tau + iT$, con $\tau \in [-U, b]$.

Analogamente:

$$\left| \int_{III} \frac{a^s}{s} ds \right| \leq \frac{1}{T} \left(\frac{a^b}{\ln a} - \frac{a^{-U}}{\ln a} \right).$$

Ademais:

$$\int_{II} \frac{a^s}{s} ds = -\int_{-U-iT}^{-U+iT} \frac{a^s}{s} ds = -i \int_{-T}^{T} \frac{a^{-U+i\tau}}{-U+i\tau} d\tau$$
$$\Rightarrow \left| \int_{II} \frac{a^s}{s} ds \right| \leq \int_{-T}^{T} \frac{a^{-U}}{|-U+i\tau|} d\tau \leq \int_{-T}^{T} a^{-U} d\tau = 2Ta^{-U}.$$

Deducimos entón:

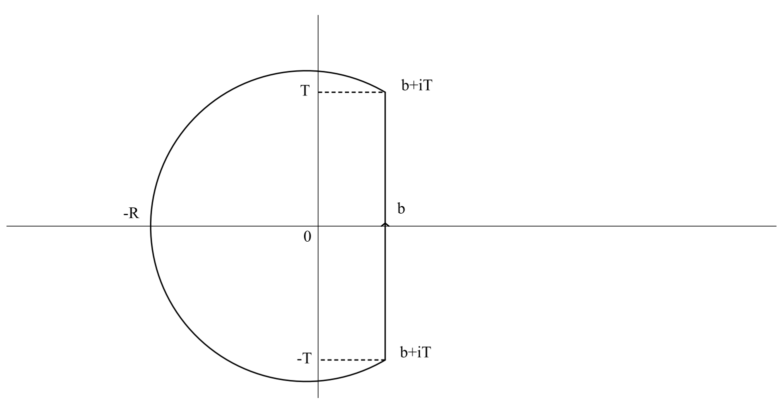
$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s}{s} ds - 1 \right| = \left| -\frac{1}{2\pi i} \int_{I} \frac{a^s}{s} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{II} \frac{a^s}{s} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{III} \frac{a^s}{s} ds \right|$$
$$\leq \frac{1}{\pi T} \left(\frac{a^b}{\ln a} - \frac{a^{-U}}{\ln a} + T^2 a^{-U} \right),$$

e pasando a límites a anterior desigualdade cando $U \longrightarrow \infty$, resulta:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s}{s} ds - 1 \right| \leq \frac{a^b}{\pi T \ln a} \leq \frac{a^b}{T \ln a}.$$

Vexamos agora a outra desigualdade para este caso.

Consideremos o contorno Γ da figura adxunta:



formado polo segmento que une $b - iT$ con $b + iT$ e o correspondente arco C de circunferencia de centro 0 e radio $R := \sqrt{b^2 + T^2}$.

De novo polo teorema dos residuos, obtemos:

$$1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{a^s}{s}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^s}{s}ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{a^s}{s}ds.$$

Entón:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^s}{s}ds - 1 &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{a^s}{s}ds\\ &\Rightarrow \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^s}{s}ds - 1\right| \le \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C}\frac{a^s}{s}ds\right|\\ &\le \frac{1}{2\pi}\sup\left\{\left|\frac{a^s}{s}\right| : s \in C^*\right\}\cdot \mathrm{Lonx}(C),\end{aligned}$$

onde C^* denota a traza do arco de circunferencia C e $\mathrm{Lonx}(C)$ a súa lonxitude.

Agora, se $s \in C$ temos que $-R \le \sigma \le b$, e así $|a^s| = a^\sigma \le a^b$. Ademais, se $s \in C^*$ será $|s| = R$ e por ser C un arco de circunferencia de radio R, $\mathrm{Lonx}(C) \le 2\pi R$.

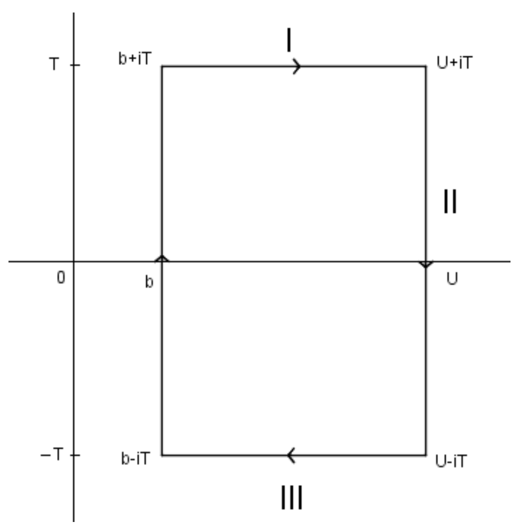
Así

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^s}{s}ds - 1\right| \le \frac{a^b}{2\pi R}2\pi R = a^b,$$

co que rematamos a proba no caso $a > 1$.

Caso $0 < a < 1$.

Sexa $U > b$ con $U > 1$ e consideremos o contorno rectangular Γ da figura adxunta:



Á vista da figura, deducimos que $\mathrm{Ind}(\Gamma, 0) = 0$, pois $0 \notin \mathrm{Int}(\Gamma)$, e polo teorema dos residuos resulta:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{a^s}{s}ds = 0,$$

equivalentemente

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^s}{s}ds = -\frac{1}{2\pi i}\int_I \frac{a^s}{s}ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{II}\frac{a^s}{s}ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{III}\frac{a^s}{s}ds.$$

De novo calculando para este caso cada integral ó longo do seu respectivo segmento, resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_I \frac{a^s}{s}ds &= \int_b^U \frac{a^{\tau+iT}}{\tau+iT}d\tau \\
&\Rightarrow \left|\frac{1}{2\pi i}\int_I \frac{a^s}{s}ds\right| \leq \frac{1}{2\pi i}\int_I \frac{a^\tau}{|\tau+iT|}d\tau \leq \frac{1}{T}\int_b^U a^\tau d\tau \\
&= \frac{1}{T}\left[\frac{a^\tau}{\ln a}\right]_b^U = \frac{1}{T}\left(\frac{a^U}{\ln a}-\frac{a^b}{\ln a}\right) \leq \frac{1}{T}\left|\frac{a^U}{\ln a}-\frac{a^b}{\ln a}\right| \\
&\leq \frac{1}{T}\left(\frac{a^U}{|\ln a|}+\frac{a^b}{|\ln a|}\right).
\end{aligned}$$

De igual modo:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{III}\frac{a^s}{s}ds\right| \leq \frac{1}{T}\left(\frac{a^U}{|\ln a|}+\frac{a^b}{|\ln a|}\right).$$

Ademais:

$$\begin{aligned}
\int_{II}\frac{a^s}{s}ds &= -\int_{U-iT}^{U+iT}\frac{a^s}{s}ds = -i\int_{-T}^{T}\frac{a^{U+i\tau}}{U+i\tau}d\tau \\
&\Rightarrow \left|\int_{II}\frac{a^s}{s}ds\right| \leq \int_{-T}^{T}\frac{a^U}{|U+i\tau|}d\tau \leq \int_{-T}^{T}a^U d\tau = 2Ta^U.
\end{aligned}$$

Deducimos pois:

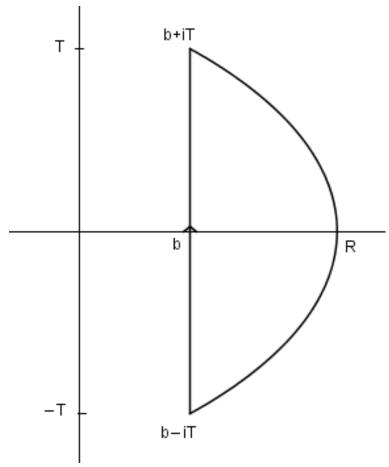
$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^s}{s}ds\right| \leq \frac{1}{\pi T}\left(\frac{a^U}{|\ln a|}+\frac{a^b}{|\ln a|}+T^2a^U\right).$$

Dado que $0 < a < 1$, de novo pasando límites á anterior igualdade cando $U \longrightarrow \infty$, resulta:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^s}{s}ds\right| \leq \frac{a^b}{\pi T|\ln a|} \leq \frac{a^b}{T|\ln a|}.$$

Vexamos agora a outra desigualdade para este caso.

Consideremos o contorno Γ da figura adxunta:
formada polo segmento que une $b-iT$ con $b+iT$, e o correspondente arco C da circunferencia de centro 0 e radio $R := \sqrt{b^2+T^2}$.



Polo teorema dos residuos:

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{a^s}{s} ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s}{s} ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{a^s}{s} ds.$$

Entón:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s}{s} ds = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{a^s}{s} ds$$
$$\Rightarrow \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s}{s} ds\right| \leq \frac{1}{2\pi}\sup\left\{\left|\frac{a^s}{s}\right| : s \in C^*\right\} \cdot \mathrm{Lonx}(C).$$

Agora, dado que $0 < a < 1$ e $b \leq \sigma \leq R$ será $|a^s| = a^\sigma \leq a^b$. Ademais $|s| = R$ e $\mathrm{Lonx}(C) < \pi R$, co cal

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s}{s} ds\right| \leq \frac{a^b \pi R}{2\pi R} \leq \frac{a^b}{2} \leq a^b,$$

co que probamos a outra desigualdade para este caso.

Caso $a = 1$.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{ds}{s} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-T}^{T} \frac{i}{b+i\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{1}{b+i\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{b-i\tau}{b^2+\tau^2} d\tau$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{b}{b^2+\tau^2} d\tau - i\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{\tau}{b^2+\tau^2} d\tau.$$

Notemos que o integrando da última integral representa unha función impar, e como o intervalo de integración é simétrico respecto a orixe, a integral resulta ser nula. Isto é:

$$\int_{-T}^{T} \frac{\tau}{b^2+\tau^2} d\tau = 0.$$

Temos así que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{ds}{s} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{b}{b^2+\tau^2}d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{T}\frac{2b}{b^2+\tau^2}d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{T}\frac{b}{b^2+\tau^2}d\tau \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{T}{b}}\frac{1}{1+v^2}dv = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\infty}\frac{1}{1+v^2}dv - \int_{\frac{T}{b}}^{\infty}\frac{1}{1+v^2}dv\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\tan^{-1}(v)\Big|_0^{\infty} - \int_{\frac{T}{b}}^{\infty}\frac{1}{1+v^2}dv\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \int_{\frac{T}{b}}^{\infty}\frac{1}{1+v^2}dv\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{T}{b}}^{\infty}\frac{1}{1+v^2}dv,\end{aligned}$$

onde efectuamos o cambio de variable $v = \frac{\tau}{b}$.

Finalmente:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{ds}{s} - \frac{1}{2}\right| &\leq \frac{1}{\pi}\int_{\frac{T}{b}}^{\infty}\frac{1}{1+v^2}dv \leq \frac{1}{\pi}\int_{\frac{T}{b}}^{\infty}\frac{1}{v^2}dv \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{v}\right]_{\frac{T}{b}}^{\infty} = \frac{b}{\pi T} \leq \frac{b}{T}.\end{aligned}$$

Con isto probamos o lema. □

Definición 5.5. Defínese a función ψ_0 como:

$$\psi_0(x) := \begin{cases}\psi(x) \text{ se } x \text{ non é potencia dun primo,} \\ \psi(x) - \frac{1}{2}\Lambda(x) \text{ se } x \text{ é potencia dun primo.}\end{cases}$$

Teorema 5.6. *Para $x \geq e$, $T \geq 2$, verifícase:*

$$\psi_0(x) = x - \sum_{|\gamma|<T}\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + R(x,T),$$

onde $\rho = \beta + i\gamma$ denota os ceros non triviais da función $\zeta(s)$, e

$$|R(x,T)| \ll \frac{x\ln^2(xT)}{T} + (\ln x)\textit{mín}\left\{1, \frac{x}{T\langle x\rangle}\right\}$$

sendo $\langle x\rangle$ a distancia de x á potencia dun primo máis próximo a x e distinta de x.

Proba. É sabido que $\dfrac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \ln 2\pi$, e que tamén para $|s| < 1$ verifícase a seguinte igualdade:

$$\ln(1-s) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}s^n,$$

de onde deducimos:

$$\frac{1}{2}\ln(1-x^2) = \sum_{\omega} \frac{x^{\omega}}{\omega},$$

sendo $\omega = -2n$ con $n = -1, -2, \dots$, son os ceros triviais da función zeta.

Polo corolario 4.18 existe T_1 tal que $T \le T_1 \le T+1$, de xeito que calquera cero non trivial $\rho = \beta + i\gamma$ de $\zeta(s)$ verifica

$$\frac{1}{|\gamma - T_1|} = O(\ln T).$$

Sexa $x \ge e$, e $b = 1 + \dfrac{1}{\ln x}$. Consideremos a integral

$$J(x, T_1) := \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT_1}^{b+iT_1} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds.$$

Na rexión $\sigma > 1$, en virtude do lema 4.15, temos que

$$\begin{aligned}|\psi_0(x) - J(x,T_1)| &= \left|\sum_{n<x}\Lambda(n) + \frac{1}{2}\Lambda(x) - \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT_1}^{b+iT_1}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds\right| \\ &= \left|\sum_{n<x}\Lambda(n) + \frac{1}{2}\Lambda(x) - \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT_1}^{b+iT_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\frac{x^s}{s}ds\right|,\end{aligned}$$

en onde o término $\frac{1}{2}\Lambda(x)$ aparece soamente se x é unha potencia dun primo.

Notemos que se $s \in [b - iT, b + iT]$, entón:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\Lambda(n)}{n^s}\frac{x^s}{s}\right| &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}\frac{x^{\sigma}}{|s|} \le \frac{x^b}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^b} \\ &= \frac{x^b}{b}\left(-\frac{\zeta'(b)}{\zeta(b)}\right) < \infty.\end{aligned}$$

Logo o criterio M-Weierstrass garante a converxencia uniforme da serie baixo a integral sobre $[b-iT, b+iT]$, e entón podemos integrar termo a termo para obter:

$$\begin{aligned}
|\psi_0(x) - J(x,T_1)| &= \left| \sum_{n<x} \Lambda(n) + \frac{1}{2}\Lambda(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT_1}^{b+iT_1} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} \right| \\
&= \left| \sum_{n<x} \Lambda(n) + \frac{1}{2}\Lambda(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) I\left(\frac{x}{n}, T_1\right) \right| \\
&= \left| \sum_{n<x} \Lambda(n) - \sum_{n<x} \Lambda(n) I\left(\frac{x}{n}, T_1\right) + \frac{1}{2}\Lambda(x) - \Lambda(x) I(1,T_1) - \sum_{n>x} \Lambda(n) I\left(\frac{x}{n}, T_1\right) \right| \\
&= \left| \sum_{n<x} \Lambda(n) \left(1 - I\left(\frac{x}{n}, T_1\right)\right) + \Lambda(x)\left(\frac{1}{2} - I(1,T_1)\right) - \sum_{n>x} \Lambda(n) I\left(\frac{x}{n}, T_1\right) \right| \\
&\le \sum_{n<x} \Lambda(n) \left|1 - I\left(\frac{x}{n}, T_1\right)\right| + \Lambda(x)\left|\frac{1}{2} - I(1,T_1)\right| - \sum_{n>x} \Lambda(n) \left|I\left(\frac{x}{n}, T_1\right)\right|.
\end{aligned}$$

Tendo en conta o lema previo 5.4 deducimos:

$$|\psi_0(x) - J(x,T_1)| \le \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq x}}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^b \text{mín}\left\{1, T_1^{-1} \left|\ln \frac{x}{n}\right|^{-1}\right\} + \Lambda(x) b T_b^{-1}.$$

A serie

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n\neq x}}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^b \text{mín}\left\{1, T_1^{-1} \left|\ln \frac{x}{n}\right|^{-1}\right\},$$

podémola descompoñer en suma de dúas series como segue

$$\sum_{\left\{n\le\frac{3}{4}x\right\}\cup\left\{n\ge\frac{5}{4}x\right\}} \left(\frac{x}{n}\right)^b \text{mín}\left\{1, T_1^{-1} \left|\ln \frac{x}{n}\right|^{-1}\right\} + \sum_{\substack{\frac{3}{4}x<n<\frac{5}{4}x \\ n\neq x}} \left(\frac{x}{n}\right)^b \text{mín}\left\{1, T_1^{-1} \left|\ln \frac{x}{n}\right|^{-1}\right\}$$

Para os termos da primeira serie, temos que $\frac{4}{3} \le \frac{x}{n}$ ou $\frac{x}{n} \le \frac{4}{5}$, co cal $\left|\ln \frac{x}{n}\right|$ está delimitado inferiormente, pois:

$$\frac{4}{3} \le \frac{x}{n} \Rightarrow 1 \le \frac{x}{n} \Rightarrow 0 \le \ln \frac{x}{n} \Rightarrow \left|\ln \frac{x}{n}\right| = \ln \frac{x}{n} \ge \ln \frac{4}{3},$$

e

$$\frac{x}{n} \le \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{x}{n} < 1 \Rightarrow \ln \frac{x}{n} < 0 \Rightarrow \left|\ln \frac{x}{n}\right| = -\ln \frac{x}{n} \ge -\ln \frac{4}{5}.$$

Tendo en conta que $e^{\ln x} = x$, será $x^b = x^{1+\frac{1}{\ln x}} = ex$, e así a primeira serie é:

$$\sum_{\left\{n\le\frac{3}{4}x\right\}\cup\left\{n\ge\frac{5}{4}x\right\}} \left(\frac{x}{n}\right)^b \text{mín}\left\{1, T_1^{-1} \left|\ln \frac{x}{n}\right|^{-1}\right\} \ll \frac{x}{T_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^b} = \frac{x}{T_1}\left(-\frac{\zeta'(b)}{\zeta(b)}\right).$$

Ademais, posto que $\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ presenta en $s = 1$ un polo simple de residuo igual a -1, e ó ser $x \geq e$ e $1 < b \leq 2$, nesta rexión vimos na demostración do teorema 4.23 De la Vallée-Poussin que:

$$-\frac{\zeta'(b)}{\zeta(b)} \ll \frac{1}{b-1} = \ln x,$$

co cal

$$\sum_{\left\{n \leq \frac{3}{4}x\right\} \cup \left\{n \geq \frac{5}{4}x\right\}} \left(\frac{x}{n}\right)^b \text{mín}\left\{1, T_1^{-1}\left|\ln\frac{x}{n}\right|^{-1}\right\} \ll \frac{x \ln x}{T_1}.$$

Vexamos agora a segunda serie.

En primeiro lugar consideremos os n tales que $\frac{3}{4}x < n < x$. Denotemos por x_1 o maior número natural menor que x que sexa potencia dun número primo. Podemos supoñer $\frac{3}{4}x < x_1 < x$, xa que do contrario, por definición de Λ, o termos que estamos considerando serían todos nulos.

Para o termo con $n = x_1$, temos que:

$$\begin{aligned} \ln\frac{x}{n} &= \ln\frac{x}{x_1} = \ln x - \ln x_1 = -(\ln x_1 - \ln_x) = -\ln\frac{x_1}{x} \\ &= -\ln\left(1 - \frac{x - x_1}{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x - x_1}{x}\right)^n \geq \frac{x - x_1}{x}, \end{aligned}$$

onde o paso a desenrolo en serie logarítmica está xustificado polo feito de que $\left|\dfrac{x - x_1}{x}\right| < 1$.

Temos pois que o termo con $n = x_1$ é:

$$\begin{aligned} \ll \Lambda(x_1)\text{mín}\left\{1, \frac{x}{T_1(x - x_1)}\right\} &\ll (\ln x)\text{mín}\left\{1, \frac{x}{T_1(x - x_1)}\right\} \\ &\leq (\ln x)\text{mín}\left\{1, \frac{x}{T_1\langle x\rangle}\right\}. \end{aligned}$$

Consideremos agora os termos con $n \neq x_1$. Podemos supoñer que $n < x_1$, pois se $x_1 < n < x$, entón $\Lambda(n) = 0$ pola definición de Λ e x_1. Para $n < x_1$, tense que $n = x_1 - \nu$ con $0 < \nu < \frac{1}{4}x$, pois:

$$\frac{3}{4}x < n = x_1 - \nu \Rightarrow x_1 - \frac{3}{4}x > \nu > 0 \Rightarrow x - \frac{3}{4}x > \nu > 0,$$

e entón

$$\frac{\nu}{x_1} < \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{x_1} < \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3} = \frac{1}{3} < 1,$$

co cal

$$\ln\frac{x}{n} \geq \ln\frac{x_1}{n} = -\ln\frac{n}{x_1} = -\ln\left(1 - \frac{\nu}{x_1}\right) \geq \frac{\nu}{x_1}.$$

Polo tanto, a suma dos termos con $n \neq x_1$ é:

$$
\begin{aligned}
\ll \sum_{0<\nu<\frac{1}{4}x} \Lambda(x_1-\nu)\frac{1}{T_1}\frac{x_1}{\nu} = \frac{x_1}{T_1} \sum_{0<\nu<\frac{1}{4}x} \Lambda(x_1-\nu)\frac{1}{\nu} \\
&\leq \frac{x_1}{T_1}(\ln x) \sum_{0<\nu<\frac{1}{4}x} \frac{1}{\nu} \ll \frac{x_1}{T_1}(\ln x)^2 \\
&\leq \frac{x_1}{T_1}(\ln x)^2, \text{ (ver por exemplo a proba do lema 4.16).}
\end{aligned}
$$

Os termos con $x < n < \frac{5}{4}x$ estúdanse de igual modo, ca salvidade de que x_1 pasa a ser x_2 que será o menor número natural maior que x que sexa potencias dun primo.

Escribamos $\langle x \rangle$ para a distancia de x á potencia dun primo máis próxima a x e distinta de x. Polo dito ata agora, séguese que:

$$|\psi_0(x) - J(x,T_1)| \ll \frac{x(\ln x)^2}{T_1} + (\ln x)\text{mín}\left\{1, \frac{x}{T_1\langle x \rangle}\right\} + \Lambda(x)\frac{b}{T_1},$$

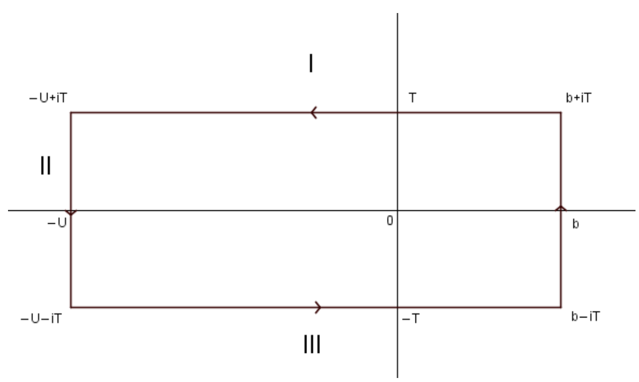
e como

$$\Lambda(x)\frac{b}{T_1} \leq \frac{2\ln x}{T_1},$$

resulta que

$$|\psi_0(x) - J(x,T_1)| \ll \frac{x(\ln x)^2}{T_1} + (\ln x)\text{mín}\left\{1, \frac{x}{T_1\langle x \rangle}\right\}. \tag{1}$$

Consideremos agora o contorno Γ rectangular da figura adxunta:



onde $U \geq 3$ é un enteiro impar.

Empregaremos o seguinte resultado coñecido:

Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é un aberto, $s_0 \in \Omega$ e $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $g(s_0) \neq 0$. Entón:

1) Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e f ten en s_0 un cero de orde m, entón $F := g\frac{f'}{f}$ ten en s_0 un polo simple e $\text{Res}(F, s_0) = mg(s_0)$.

2) Se $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{s_0\})$ ten en s_0 un polo de orde m, entón F ten en s_0 un polo simple e $\operatorname{Res}(F, s_0) = -mg(s_0)$.

Aplicando este resultado, deducimos que a función $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s}$ ten polos simples nos puntos:

i) $s = 1$ con residuo igual a x,

ii) $s = \rho$ con residuo $-k(\rho)\frac{x^\rho}{\rho}$, para cada cero non trivial de $\zeta(s)$ onde $k(\rho)$ denota a multiplicidade do respectivo cero.

iii) $s = -2n$ con $n = 1, 2, \dots$, con residuo $-\frac{x^{-2n}}{-2n}$, para cada cero trivial de $\zeta(s)$.

Ademais en $s = 0$ ten un polo simple con residuo

$$\lim_{s \to 0} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) x^s = -\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}.$$

Aplicando o teorema dos residuos, tendo en conta que pola elección de T_1 e de U non existen ceros de $\zeta(s)$ en Γ, resulta:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds = x - \sum_{|\gamma| < T_1} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{0 < 2n < U} \frac{x^{-2n}}{-2n},$$

é dicir,

$$\begin{aligned} J(x, T_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT_1}^{b+iT_1} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds \\ &= x - \sum_{|\gamma| < T_1} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{0 < 2n < U} \frac{x^{-2n}}{-2n} - \frac{1}{2\pi i} \int_I \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{II} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{III} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds. \end{aligned} \tag{2}$$

Acoutaremos agora cada unha das integrais.

Dado que $T_1 \geq T \geq 2$ para $s = \sigma + iT_1$ con $-1 \leq \sigma \leq 2$, polo corolario 4.20 tense:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|\gamma - T_1| \leq 1} \frac{1}{s - \rho} + O(\ln T_1).$$

Para cada sumando desta suma verifícase:

$$\begin{aligned} |s - \rho| &= |(\sigma - \beta) + i(T_1 - \gamma)| \geq |\gamma - T_1| \\ &\Rightarrow \frac{1}{|s - \rho|} \frac{1}{|\gamma - T_1|} \ll \ln T \leq \ln T_1, \end{aligned}$$

pola elección de T_1 e corolario 4.18.

Logo:

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \ll \ln^2 T_1 \tag{3}$$

A cota (3) vainos permitir acoutar modularmente a integral sobre o segmento I.

En efecto:

$$\begin{aligned}\int_I \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds = -\int_{-U+iT_1}^{b+iT_1}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds = \int_{-U}^{b}\left(-\frac{\zeta'(\tau+iT_1)}{\zeta(\tau+iT_1)}\right)\frac{x^{\tau+iT_1}}{\tau+iT_1}d\tau \\ \Rightarrow \left|\int_I \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds\right| \leq \int_{-U}^{b}\left|\frac{\zeta'(\tau+iT_1)}{\zeta(\tau+iT_1)}\right|\frac{x^\tau}{|\tau+iT_1|}d\tau \\ = \int_{-U}^{-1}\left|\frac{\zeta'(\tau+iT_1)}{\zeta(\tau+iT_1)}\right|\frac{x^\tau}{|\tau+iT_1|}d\tau + \int_{-1}^{b}\left|\frac{\zeta'(\tau+iT_1)}{\zeta(\tau+iT_1)}\right|\frac{x^\tau}{|\tau+iT_1|}d\tau.\end{aligned}$$

Agora, por (3) a segunda integral é:

$$\begin{aligned}\ll \frac{\ln^2 T_1}{T_1}\int_{-\infty}^{b} x^\tau d\tau = \frac{\ln^2 T_1}{T_1}\left[\frac{x^\tau}{\ln x}\right]_{-\infty}^{b} = \frac{\ln^2 T_1}{T_1}\cdot\frac{x^b}{\ln x} \\ = \frac{ex\ln^2 T_1}{T_1\ln x} \ll \frac{x\ln^2 T_1}{T_1\ln x}.\end{aligned}$$

Respecto á primeira integral, dado que $\sigma \leq -1$ e $|(\sigma+iT_1)+2n| \geq T_1 \geq 2 > \frac{1}{2}$ para calquera $n = 1, 2, \dots$, tense, pola proposición 4.22, que:

$$\left|\frac{\zeta'(\sigma+iT_1)}{\zeta(\sigma+iT_1)}\right| \ll \ln(2|\sigma+iT_1|),$$

debido a que s non está en ningún dos círculos pechados de radio $\frac{1}{2}$ con centro nun cero trivial $-2n$ de $\zeta(s)$.

Dado que a función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ é decrecente en (e, ∞), resulta

$$\frac{\ln(2|\sigma+iT_1|)}{2|\sigma+iT_1|} \leq \frac{\ln 2T_1}{2T_1},$$

e polo tanto a primeira integral é:

$$\begin{aligned}\ll \frac{\ln 2T_1}{T_1}\int_{-U}^{-1} x^\tau d\tau = \frac{\ln 2T_1}{T_1}\left[\frac{x^\tau}{\ln x}\right]_{-U}^{-1} = \frac{\ln 2T_1}{T_1}\left(\frac{x^{-1}}{\ln x} - \frac{x^{-U}}{\ln x}\right) \\ = \frac{\ln 2T_1}{T_1\ln x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^U}\right) \leq \frac{\ln 2T_1}{T_1 x\ln x}.\end{aligned}$$

Posto que

$$\frac{\ln 2T_1}{T_1 x \ln x} \leq \frac{\ln T_1^2}{T_1 x \ln x} = \frac{2\ln T_1}{T_1 x \ln x} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2\ln 2 \ln T_1}{T_1 x \ln x}$$
$$\leq \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{x \ln^2 T_1}{T_1 x \ln x} \ll \frac{x \ln^2 T_1}{T_1 x \ln x},$$

deducimos que

$$\left| \int_I \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds \right| \ll \frac{x \ln^2 T_1}{T_1 x \ln x}. \tag{4}$$

O método a seguir para acoutar a integral sobre o segmento III e completamente análogo, obtendo a mesma cota.

Alternativamente podemos razoar do seguinte modo. Da expresión da derivada logarítmica vista no teorema 4.14, (e tendo presente que B_0 é real), tense que $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ é o conxugado de $\frac{\zeta'(\bar{s})}{\zeta(\bar{s})}$, e daquela a integral sobre o segmente III é a oposta do conxugado da integral sobre o segmento I, e polo tanto teñen o mesmo módulo. Así

$$\left| \int_{III} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds \right| \ll \frac{x \ln^2 T_1}{T_1 x \ln x}. \tag{5}$$

Por último, para a integral sobre o segmento II, temos que:

$$\int_{II} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds = -\int_{-U-iT_1}^{-U+iT_1} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds = i \int_{-T_1}^{T_1} \left(-\frac{\zeta'(-U+i\tau)}{\zeta(-U+i\tau)} \right) \frac{x^{-U+i\tau}}{-U+i\tau} d\tau$$
$$\Rightarrow \left| \int_{II} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds \right| \leq \int_{-T_1}^{T_1} \left| \frac{\zeta'(-U-iT_1)}{\zeta(-U-iT_1)} \right| \frac{x^{-U}}{|-U-iT_1|} d\tau$$
$$\ll \frac{\ln 2U}{U} \int_{-T_1}^{T_1} x^{-U} d\tau = \frac{\ln 2U}{Ux^U} 2T_1 \ll \frac{T_1 \ln U}{Ux^U}, \tag{6}$$

onde a última limitación é debido a que $U \geq 3$ e impar, e aplicando a proposición 4.22.

Empregando $(1),(2),(4),(5),(6)$ convenientemente, deducimos que:

$$\begin{aligned}
\psi_0(x) &= \psi_0(x) - J(x,T_1) + J(x,T_1), && \text{(por (2))}\\
&= \psi_0(x) - J(x,T_1) + x - \sum_{|\gamma|<T_1} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{0<2n<U} \frac{x^{-2n}}{-2n} - \\
&- \int_I \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds - \int_{II} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds - \int_{III} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds\\
&\Rightarrow \left|\psi_0(x) - \left(x - \sum_{|\gamma|<T_1} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{0<2n<U} \frac{x^{-2n}}{-2n}\right)\right|\\
&\leq |\psi_0(x) - J(x,T_1)| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_I \varpi(\zeta,s,x)ds\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{II} \varpi(\zeta,s,x)ds\right| + \\
&+ \frac{1}{2\pi}\left|\int_{III} \varpi(\zeta,s,x)ds\right|, && \text{(por (1))}\\
&\ll \frac{x(\ln x)^2}{T_1} + (\ln x)\text{mín}\left\{1, \frac{x}{T_1\langle x\rangle}\right\} + \frac{1}{2\pi}\left|\int_I \varpi(\zeta,s,x)ds\right| + \\
&+ \frac{1}{2\pi}\left|\int_{II} \varpi(\zeta,s,x)ds\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{III} \varpi(\zeta,s,x)ds\right|, && \text{(por (3),(4),(5))}\\
&\ll \frac{x(\ln x)^2}{T_1} + (\ln x)\text{mín}\left\{1, \frac{x}{T_1\langle x\rangle}\right\} + \frac{x(\ln x)^2}{T_1} + \frac{T_1 \ln U}{Ux^U}.
\end{aligned}$$

Polo tanto, podemos escribir:

$$\psi_0(x) = x - \sum_{|\gamma|<T_1} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{0<2n<U} \frac{x^{-2n}}{-2n} + R(x,U,T_1),$$

onde

$$R(x,U,T_1) \ll \frac{x\ln^2 T_1}{T_1} + \frac{T_1 \ln U}{Ux^U} + \frac{x(\ln x)^2}{T_1} + (\ln x)\text{mín}\left\{1, \frac{x}{T_1\langle x\rangle}\right\}.$$

Pasando a límites a anterior igualdade cando $U \longrightarrow \infty$, resulta:

$$\frac{T_1 \ln U}{Ux^U} \longrightarrow 0,$$

e

$$\sum_{0<2n<U} \frac{x^{-2n}}{-2n} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{-2n} = \frac{1}{2}\ln(1-x^2).$$

Ademais:

$$\begin{aligned}
\frac{x\ln^2 T_1}{T_1 \ln x} + \frac{x\ln^2 x}{T_1} &\leq \frac{x\ln^2 T_1}{T_1} + \frac{x\ln^2 x}{T_1} = \frac{x}{T_1}(\ln^2 T_1 + \ln^2 x)\\
&\leq \frac{x}{T_1}(\ln T_1 + \ln x)^2 = \frac{x}{T_1}\ln^2(xT_1).
\end{aligned}$$

Así pois:

$$\psi_0(x) = x - \sum_{|\gamma|<T_1} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{0<2n<U} \frac{x^{-2n}}{-2n} + R(x,T_1),$$

onde

$$R(x,T_1) = \lim_{U\to\infty} R(x,U,T_1),$$

e

$$|R(x,T_1)| \ll \frac{x\ln^2(xT_1)}{T_1} + (\ln x)\min\left\{1, \frac{x}{T_1\langle x\rangle}\right\}.$$

Por último vexamos que T_1 pode ser substituído por T.

Dado que $T \leq T_1 \leq T+1$, será $\frac{1}{T_1} \leq \frac{1}{T}$, logo:

$$|R(x,T_1)| \ll \frac{x\ln^2(xT)}{T} + (\ln x)\min\left\{1, \frac{x}{T\langle x\rangle}\right\}.$$

Ademais:

$$\left|\frac{x^\rho}{\rho}\right| = \frac{x^\beta}{|\rho|} \leq \frac{x}{|\rho|} \leq \frac{x^\rho}{|\gamma|} \leq \frac{x}{T},$$

e dado que o número de ceros non triviais da función zeta que verifiquen $T \leq |\gamma| \leq T_1$ non exceden $c\ln T$, como vimos no corolario 4.18, debe ser:

$$\left|\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho}\right| \ll \frac{x\ln T}{T}.$$

Logo:

$$\begin{aligned}\psi_0(x) &= x - \sum_{|\gamma|<T} \frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{T\leq|\gamma|<T_1} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + R(x,T_1)\\ &= \sum_{|\gamma|<T} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + R(x,T),\end{aligned}$$

con

$$R(x,T) = R(x,T_1) - \sum_{T\leq|\gamma|<T_1} \frac{x^\rho}{\rho}.$$

Así:

$$\begin{aligned}|R(x,T)| &\leq |R(x,T_1)| + \left|\sum_{T\leq|\gamma|<T_1} \frac{x^\rho}{\rho}\right|\\ &\ll \frac{x\ln^2(xT)}{T} + (\ln x)\min\left\{1, \frac{x}{T\langle x\rangle}\right\}.\end{aligned}$$

□

NOTA 1: Se se fai $T \longrightarrow \infty$, entón $R(x,T) \longrightarrow 0$.
Polo tanto

$$\begin{aligned}\psi_0(x) &= x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\ln(1-x^2) \\ &= x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_\omega \frac{x^\omega}{\omega},\end{aligned}$$

onde $\omega = -2n$, con $n = 1, 2, \dots$, son os ceros triviais de $\zeta(s)$, e

$$\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} := \lim_{T\to\infty} \sum_{|\gamma|<T} \frac{x^\rho}{\rho}.$$

NOTA 2: Se x é un enteiro, neste caso $\langle x\rangle \geq 1$, e daquela

$$|R(x,T)| \ll \frac{x\ln^2(xT)}{T}.$$

Corolario 5.7. *Para $x \geq e$ e $T \geq 2$, verifícase:*

$$\psi(x) = x - \sum_{|\gamma|\leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x\ln^2(xT)}{T}\right) + O(\ln x).$$

Proba. Como

$$-\frac{1}{2}\ln(1-x^{-2}) \leq -\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{e^2}\right),$$

do teorema dedúcese:

$$\psi_0(x) = x - \sum_{|\gamma|\leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x\ln^2(xT)}{T}\right) + O(\ln x).$$

O resultado séguese, tendo en conta que $\psi(x) = \psi_0(x)$ ou $\psi(x) = \psi_0(x) + \frac{1}{2}\Lambda(x)$, e $\Lambda(x) \leq \ln x$. □

5.3. O Teorema do Número Primo

O teorema do número primo é un dos resultados máis relevantes na teoría de números.

A orixe da conxectura débese a Gauus alá por 1791, cando tan so tiña 14 anos. Debido a el usamos $\pi(x)$ para referirnos aos números primos menores ou iguais a x. Posteriormente, en 1798, o teorema tamén foi conxecturado por Legendre establecendo que $\pi(x)$ parecía ter a forma

$$\frac{x}{A\ln x + B}.$$

Ambos, tanto Gauss como Legendre, estableceron notables melloría para dita conxectura, ata conseguir o resultado tal e como o coñecemos hoxe en día. Cabe mencionar que fixeron contribucións a este propósito Chebyshev, Riemann e Dirichlet.

En esencia, di que os números primos menores ou iguales que x, $\pi(x)$, satisfai a relación asintótica

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}.$$

Non foi ata 1896 cando nos atopamos ca primeira demostración do teorema establecida de forma independente por Hadamard e De la Vallée-Poussin.

Tanto a demostración de Hadamard como a De la Vallée-Poussin, e outras posteriores, apoiáronse na poderosa maquinaria da teoría de funcións complexa desenrolada ó longo de século XIX, en particular na función zeta de Riemann.

Sen embargo, a sorpresa non acababa aí. En 1949 Paul Erdös e Atle Selberg deron unha demostración do teorema dos números primos empregando argumentos de natureza elemental.

Neste traballo, como é doado adiviñar, a proba que veremos basease na función zeta de Riemann, ou mellor dito, no traballo de empezado por Legendre, Gauss, Dirichlet, Riemann, Chebyshev..., culminado por Hadamard e De la Vallée-Poussin, e posteriormente... En fin.

Lema 5.8. *Para $T \geq 2$ tense que*

$$\sum_{|\gamma| \leq T} \frac{1}{|\rho|} = O(\ln^2 T),$$

onde $\rho = \beta + i\gamma$ son os ceros non triviais de $\zeta(s)$.

Proba. Tense que:

$$\sum_{|\gamma| \leq T} \frac{1}{|\rho|} = 2 \sum_{0<\gamma \leq T} \frac{1}{|\rho|} = 2 \sum_{0<\gamma<1} \frac{1}{|\rho|} + 2 \sum_{1 \leq \gamma \leq T} \frac{1}{|\rho|} = O(1) + 2 \sum_{1 \leq \gamma \leq T} \frac{1}{|\rho|}.$$

Acoutemos esta última suma:

$$\sum_{1 \leq \gamma \leq T} \frac{1}{|\rho|} \leq \sum_{1 \leq \gamma \leq T} \frac{1}{\gamma} = \sum_{n=1}^{[T]-1} \sum_{n \leq \gamma \leq n+1} \frac{1}{\gamma} + \sum_{[T] \leq \gamma \leq T} \frac{1}{\gamma} \leq \sum_{n=1}^{[T]} \sum_{n \leq \gamma \leq n+1} \frac{1}{\gamma}.$$

Agora, o número de ceros que verifica $n \leq \gamma \leq n+1$, en virtude do corolario 4.18, non exceden $c\ln(n+2) \leq c\ln(T+2)$.

Posto que

$$\frac{1}{\gamma} \leq \frac{1}{n},$$

será:

$$\sum_{n=1}^{[T]} \sum_{n \leq \gamma \leq n+1} \frac{1}{\gamma} \leq \sum_{n=1}^{[T]} \frac{1}{n} \sum_{n \leq \gamma \leq n+1} 1 = O(\ln(T+2)) \sum_{n=1}^{[T]} \frac{1}{n}$$

e como:

$$\sum_{n=1}^{[T]} \frac{1}{n} \ll \ln[T] \ll \ln T \ll \ln(T+2),$$

conclúese que:

$$\sum_{1\leq\gamma\leq T} \frac{1}{|\gamma|} = O(\ln^2(T+2)).$$

De

$$\ln^2(T+2) \leq \ln^2(2T) \leq \ln^2(T^2) = 4\ln^2 T,$$

obtense o desexado. □

O seguinte teorema é o resultado forte que nos permitirá obter a proba do teorema do número primo.

Teorema 5.9. *Existe un número real $c > 0$ tal que para $x \geq 2$ tense:*

a) $\psi(x) = x + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}})$

b) $\pi(x) = Li(x) + O(xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}})$ *onde* $Li(x) = \int_2^x \dfrac{dv}{\ln v}$.

Proba. Probamos a).

Polo corolario 5.7 tense que

$$\psi(x) = x - \sum_{|\gamma|<T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x\ln^2(xT)}{T}\right) + O(\ln x)$$

para cada $T \geq 2$ e $x \geq e$.

Polo teorema de De La Vallée-Poussin 4.23 existe un número real $a' > 0$ tal que para cada cero $\rho = \beta + i\gamma$ tense

$$\beta < 1 - \frac{a'}{\ln(|\gamma|+2)}.$$

Entón para os $\rho = \beta + i\gamma$ con $|\gamma| < T$:

$$\beta < 1 - \frac{a'}{\ln(T+2)},$$

e así

$$\begin{aligned} |x^\rho| = x^\beta < x^{\left(1-\frac{a'}{\ln(T+2)}\right)} &= xx^{-\frac{a'}{\ln(T+2)}} \\ &= xe^{-\frac{a'}{\ln(T+2)}\ln x}. \end{aligned}$$

Posto que

$$\ln(T+2) \leq \ln(2T) \leq \ln(T^2) = 2\ln T,$$

séguese que

$$-\frac{a'}{\ln(T+2)} \leq \frac{a'}{2\ln(T)},$$

e daquela

$$|x^\rho| < xe^{-\frac{a\ln x}{\ln T}}$$

con $a = \frac{a'}{2} > 0$.

Polo lema 5.8:

$$\left|\sum_{|\gamma|<T} \frac{x^\rho}{\rho}\right| \ll x(\ln T)^2 e^{\left(-\frac{a\ln x}{\ln T}\right)}.$$

Polo tanto:

$$|\psi(x) - x| \ll \frac{x\ln(xT)}{T} + \ln x + x(\ln T)^2 e^{\left(-\frac{a\ln x}{\ln T}\right)}.$$

Tomemos $T := e^{\sqrt{\ln x}}$. Como $T \leq x$, resulta que $\ln x \leq \dfrac{x\ln^2(xT)}{T}$, e así:

$$\begin{aligned}
|\psi(x) - x| &\ll \frac{x\ln^2(xT)}{T} + x(\ln T)^2 e^{\left(-\frac{a\ln x}{\ln T}\right)} \ll \frac{x\ln^2(xT)}{T} + x(\ln x)e^{\left(-\frac{a\ln x}{\ln T}\right)} \\
&\ll x(\ln^2 x)e^{-\sqrt{\ln x}} + x(\ln x)e^{-a\sqrt{\ln x}}, \text{ pois } \quad (\ln(xT) \leq \ln(x^2)) \\
&\ll x(\ln^2 x)e^{-\omega\sqrt{\ln x}},
\end{aligned}$$

con $\omega := \text{mín}\{1, a\}$.

Sexa λ tal que $0 < \lambda < \omega$. Tense que:

$$\ln^2 x \ll e^{\lambda\sqrt{\ln x}}, \quad \forall\, x \geq e.$$

En efecto, como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x}{e^{\lambda\sqrt{\ln x}}} = 0,$$

existirá M tal que

$$\frac{\ln^2 x}{e^{\lambda\sqrt{\ln x}}} \leq 1 \quad \forall\, x \geq M.$$

Se $M \leq e$, entón $\ln^2 x \leq e^{\lambda\sqrt{\ln x}} \quad \forall\, x \geq e$.

Se $e < M$, entón, por ser continua a función:

$$x \in [e, M] \mapsto \frac{\ln^2 x}{e^{\lambda\sqrt{\ln x}}},$$

existe A tal que

$$\frac{\ln^2 x}{e^{\lambda\sqrt{\ln x}}} \leq A \quad \forall\, x \in [e, M].$$

Polo tanto:

$$\ln^2 x \leq \text{máx}\{1, A\} e^{\lambda\sqrt{\ln x}} \quad \text{se} \quad x \geq e.$$

Temos así que:

$$|\psi(x) - x| \ll x^{\lambda\sqrt{\ln x}} e^{-\omega\sqrt{\ln x}} = xe^{-(\omega-\lambda)\sqrt{\ln x}}.$$

Tomando $c := \omega - \alpha$, tense que

$$\psi(x) = x + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\right), \quad \forall x \geq e.$$

Vexamos que isto tamén se verifica para $2 \leq x \leq e$:
Se $2 \leq x \leq e$, será $\psi(x) = \Lambda(2) = \ln 2$. Pero:

$$2 \leq x \leq e \Rightarrow -2 \geq -x \geq -e,$$

e

$$\Lambda(2) = \ln 2 \Rightarrow -2 + \ln 2 \geq \psi(x) - x \geq -e + \ln 2 \geq -e,$$

co cal

$$|\psi(x) - x| = x - \psi(x) \leq e.$$

Ademais:

$$xe^{-c\sqrt{\ln x}} \geq xe^{-c} \geq 2e^{-c} \quad (2 \leq x \leq e).$$

Logo:

$$|\psi(x) - x| \leq e = c^* 2e^{-c} \leq c^* xe^{-c\sqrt{\ln x}},$$

con $c^* = \frac{1}{2}e^{1+c}$, e así:

$$\psi(x) = x + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\right)$$

tamén se $2 \leq x \leq e$.
Probamos b).
Sexa

$$S(x) := \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} = \sum_{p \leq x} 1 + \sum_{\substack{n=p^k \leq x \\ k \geq 2}} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} = \pi(x) + \sum_{\substack{n=p^k \leq x \\ k \geq 2}} \frac{\Lambda(n)}{\ln n}.$$

Para cada sumando da última suma, tense que:

$$\frac{\Lambda(n)}{\ln n} = \frac{\ln p}{\ln p^k} = \frac{\ln p}{k \ln p} = \frac{1}{k} \leq 1.$$

Cada primo p que aparece ten que verificar: $p^2 \leq x$, é dicir, $p \leq \sqrt{x}$. Logo o número de primos que aparece é $\leq \sqrt{x}$. Doutra parte, $2^k \leq x \Rightarrow k \leq \frac{\ln x}{\ln 2}$, e así o número de k que aparecen é $\leq \frac{\ln x}{\ln 2}$. Polo tanto:

$$S(x) = \pi(x) + O(\sqrt{x} \ln x), \;\; \forall x \geq 2.$$

Consideremos a sucesión $c_n = \Lambda(n)$ e a función

$$f : [2, x] \to \mathbb{C}, \quad f(v) = \frac{1}{\ln v}.$$

Aplicando a identidade de Abel vista no lema 1.13, deducimos:

$$\sum_{2<n\leq x} c_n f(n) = -\int_2^x c(v) f'(v) dv + c(x) f(x),$$

onde

$$c(v) = \sum_{2<n\leq v} c_n = \sum_{2<n\leq v} \Lambda(n) = \psi(v) - \Lambda(2) = \psi(v) - \ln 2.$$

Polo tanto:

$$\sum_{2<n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} = -\int_2^x (\psi(v) - \ln 2) \frac{-dv}{v \ln^2 v} + \frac{\psi(x) - \ln 2}{\ln x},$$

e como

$$\sum_{2<n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} = S(x) - \frac{\Lambda(2)}{\ln 2} = S(x) - 1,$$

tense que

$$S(x) = \int_2^x \frac{\psi(v) dv}{v \ln^2 v} + \frac{\psi(x)}{\ln x} + 1 - \int_2^x \frac{\ln 2}{v \ln^2 v} dv - \frac{\ln 2}{\ln x}.$$

Tense que:

$$\int_2^x \frac{\ln 2 dv}{v \ln^2 v} = (\ln 2) \left[\frac{-1}{\ln v} \right]_2^x = (\ln 2) \left[\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln x} \right] = 1 - \frac{\ln 2}{\ln x},$$

polo que

$$1 - \int_2^x \frac{\ln 2 dv}{v \ln^2 v} - \frac{\ln 2}{\ln x} = 0,$$

e así

$$S(x) = \int_2^x \frac{\psi(v) dv}{v \ln^2 v} + \frac{\psi(x)}{\ln x}.$$

Pola parte a) tense que:

$$\psi(v) = v + O\left(v e^{-c\sqrt{\ln v}} \right), \quad v \geq 2,$$

é dicir

$$\psi(v) = v + R(v),$$

con $|R(v)| \leq c' v e^{-c\sqrt{\ln v}}, \;\; v \geq 2.$

Logo:

$$S(x) = \int_2^x \frac{dv}{\ln^2 v} + \int_2^x \frac{R(v)}{v \ln^2 v} dv + \frac{x}{\ln x} + \frac{R(x)}{\ln x}.$$

Integrando por partes con $f = -v,\ dg = \dfrac{-dv}{v\ln^2 v}$:

$$\int_2^x \frac{dv}{\ln^2 v} + \frac{x}{\ln x} = \int_2^x \frac{dv}{\ln v} + \frac{2}{\ln 2}.$$

Logo:

$$S(x) = Li(x) + \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{R(v)}{v\ln^2 v}dv + \frac{R(x)}{\ln x},$$

e así

$$|S(x) - Li(x)| \leq \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{|R(v)|}{v\ln^2 v}dv + \frac{|R(x)|}{\ln x}.$$

Probaremos agora que esta última expresión é

$$\ll xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}}, \quad \forall x \geq 2,$$

o cal se terá que

$$S(x) = Li(x) + O(xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}}), \quad \forall x \geq 2.$$

Tense:

$$\begin{aligned}\frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{|R(v)|dv}{v\ln^2 v} + \frac{|R(x)|}{\ln x} &\leq \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{c'v e^{-c\sqrt{\ln v}}}{v\ln^2 v}dv + \frac{c'xe^{-c\sqrt{\ln x}}}{\ln x}\\ &\ll \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x e^{-c\sqrt{\ln v}}dv + xe^{-c\sqrt{\ln x}}.\end{aligned}$$

Ocorre que,

$$\frac{2}{\ln 2} \leq c^* xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}}, \quad \forall x \geq 2$$

sendo $c^* > 0$ unha constante, xa que a función $x \mapsto xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}}$ está acotada inferiormente por un número maior que 0 en $[2, \infty)$: decrece de 2 a $e^{\frac{c^2}{16}}$ e crece a partir de ahí; e entón o valor que toma en $e^{\frac{c^2}{16}}$ é un mínimo.

Vexamos agora que

$$\int_2^x e^{-c\sqrt{\ln v}}dv + xe^{-c\sqrt{\ln x}} \ll xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}}, \quad \forall x \geq 2.$$

Estudaremos separadamente os x tales que $x^{\frac{1}{4}} \leq 2$, e os x tales que $2 < x^{\frac{1}{4}}$, é dicir, os x tales que $2 \leq x \leq 16$, e os x tales que $16 < x$.

- Se $2 < x^{\frac{1}{4}}$:

$$\begin{aligned}\int_2^x e^{-c\sqrt{\ln v}}dv + xe^{-c\sqrt{\ln x}} &= \int_2^{x^{\frac{1}{4}}} e^{-c\sqrt{\ln v}}dv + \int_{x^{\frac{1}{4}}}^x e^{-c\sqrt{\ln v}}dv + xe^{-c\sqrt{\ln x}} \\ &\leq \int_2^{x^{\frac{1}{4}}} e^{-c\sqrt{\ln 2}}dv + \int_{x^{\frac{1}{4}}}^x e^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}}dv + xe^{-c\sqrt{\ln x}} \\ &= e^{-c\sqrt{\ln 2}}(x^{\frac{1}{4}} - 2) + e^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}}(x - x^{\frac{1}{4}}) + xe^{-c\sqrt{\ln x}} \\ &\leq e^{-c\sqrt{\ln 2}}x^{\frac{1}{4}} + xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}} + xe^{-c\sqrt{\ln x}} \\ &\leq e^{-c\sqrt{\ln 2}}x^{\frac{1}{4}} + 2xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}}.\end{aligned}$$

Como
$$\lim_{x\mapsto\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}}} = 0,$$
resulta que
$$x^{\frac{1}{4}} \ll xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}},$$
e polo tanto:
$$\int_2^x e^{-c\sqrt{\ln v}}dv + xe^{-c\sqrt{\ln x}} \ll xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}}, \quad (se\ x > 16).$$
Cálculo do límite: con $t = \ln x$ o límite transfórmase en
$$\lim_{x\mapsto\infty} \frac{e^{\frac{1}{4}t}}{e^t e^{-\frac{c}{2}\sqrt{t}}} = \lim_{x\mapsto\infty} \frac{1}{e^{\frac{3}{4}t-\frac{c}{2}\sqrt{t}}} = 0.$$

- Se $x^{\frac{1}{4}} \leq 2 \leq x$, é dicir, $2 \leq x \leq 16$, como a función
$$x \in [2,16] \mapsto \int_2^x e^{-c\sqrt{\ln v}}dv + xe^{-c\sqrt{\ln x}}$$
é continua, resulta que está acoutada, é dicir,
$$\int_2^x e^{-c\sqrt{\ln v}}dv + xe^{-c\sqrt{\ln x}} \leq B, \quad \text{se } 2 \leq x \leq 16.$$

Sexa $M = \text{mín}\left\{xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}} / \ 2 \leq x \leq 16\right\} > 0$. Sexa c_1 tal que $B = c_1 M$ $\left(\text{é dicir, } \ c_1 = \frac{B}{M}\right)$.
Entón, para $2 \leq x \leq 16$:
$$\int_2^x e^{-c\sqrt{\ln v}}dv + xe^{-c\sqrt{\ln x}} \leq B = c_1 M \leq c_1 xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}}.$$

Isto remata a demostración de que $S(x) = Li(x) + O\left(xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}}\right)$.

Tamén temos visto que $S(x) = \pi(x) + O(\sqrt{x}\ln x)$, logo:

$$|\pi(x) - Li(x)| \leq |\pi(x) - S(x)| + |S(x) - Li(x)| \ll \sqrt{x}\ln x + xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}} \ll xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}},$$

onde o último paso é consecuencia de que

$$\sqrt{x}\ln x \ll xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}},$$

xa que

$$\lim_{x\mapsto\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}}} = 0.$$

Isto proba b).

□

Corolario 5.10. $\lim_{x\mapsto\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$

Proba. Do teorema dedúcese que

$$\frac{\psi(x)}{x} = 1 + O\left(e^{-c\sqrt{\ln x}}\right),$$

polo tanto

$$\left|\frac{\psi(x)}{x} - 1\right| \ll e^{-c\sqrt{\ln x}},$$

co que

$$\lim_{x\mapsto\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

A relación entre a función de Chebyshev e a función de contar números primos vista na proposición 5.2, deste corolario séguese a proba do teorema do número primo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1.$$

□

5.4. A hipóteses de Riemann no erro do T. do número primo.

Nesta sección daremos un resultado relativo á hipóteses de Riemann e a limitación do termo do erro no teorema do número primo. É o seguinte resultado:

Proposición 5.11. *Sexa $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ un número real fixo. Equivalen:*

1) $\psi(x) = x + O\left(x^{\theta}\ln^2 x\right)$ *para* $x \geq 2$.

2) $\zeta(s) \neq 0$ *para* $\sigma > \theta$.

Ademais, se estas condicións se verifica, entón:

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(x^{\theta}\ln x\right) \quad \textit{para} \quad x \geq 2.$$

En particular, para $\theta = \frac{1}{2}$, *a hipóteses de Riemann é equivalente a:*

$$\psi(x) = x + O\left(x^{\frac{1}{2}}\ln^2 x\right) \quad \textit{para} \quad x \geq 2,$$

e isto implica

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(x^{\frac{1}{2}}\ln x\right) \quad \textit{para} \quad x \geq 2.$$

Proba.
1) $\Rightarrow$ 2).

Para $\sigma > 1$ pola proposición 5.3 temos que:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s\int_1^{\infty}\psi(x)\frac{dx}{x^{s+1}}.$$

Escribindo $\psi(x) = x + R(x)$ con $R(x) := \psi(x) - x$ e $|R(x)| \leq cx^{\theta}\ln^2 x$ para $x \geq 2$, obtemos:

$$\begin{aligned}-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= s\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^s} + s\int_1^{\infty}\frac{R(x)}{x^{s+1}}dx\\ &= \frac{s}{s-1} + s\int_1^{\infty}\frac{R(x)}{x^{s+1}}dx, \quad \text{para} \quad \sigma > 1.\end{aligned}$$

Veremos que a integral $\int_1^{\infty}\frac{R(x)}{x^{s+1}}dx$ converxe uniformemente sobre cada compacto do semiplano $\sigma > \theta$.

Sexa pois K un compacto. Existe $a > \theta$ tal que $\sigma \geq a \ \forall\, s \in K$. Entón para $s \in K$:

$$\left|\frac{R(x)}{x^{s+1}}\right| \leq \frac{cx^{\theta}\ln^2 x}{x^{\sigma+1}} \leq \frac{cx^{\theta}\ln^2 x}{x^{a+1}} = cx^{-a-1+\theta}\ln^2 x, \quad \forall\, s \in K.$$

Vexamos que $\int_1^{\infty}cx^{-a-1+\theta}\ln^2 x dx < \infty$, o que determinará que a integral $\int_1^{\infty}\frac{R(x)}{x^{s+1}}dx$ converxe uniformemente sobre cada compacto do semiplano $\sigma > \theta$.

Integrando por partes con $u = \ln^2 x \Rightarrow du = \frac{2}{x}\ln x dx$, e $dv = x^{-a-1+\theta} \Rightarrow v = \frac{-1}{a-\theta}x^{-a+\theta}$, resulta:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}cx^{-a-1+\theta}\ln^2 x dx &= \frac{1}{a-\theta}\left[\frac{-\ln^2 x}{x^{a-\theta}}\right]_1^{\infty} + \frac{2}{a-\theta}\int_1^{\infty}x^{-a-1+\theta}\ln x dx\\ &= \frac{2}{a-\theta}\int_1^{\infty}x^{-a-1+\theta}\ln x dx,\end{aligned}$$

de novo con $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$ e $dv = x^{-a-1+\theta} \Rightarrow v = \frac{-1}{a-\theta}x^{-a+\theta}$, resulta:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty x^{-a-1+\theta}\ln x dx &= \frac{1}{a-\theta}\left[\frac{-\ln x}{x^{a-\theta}}\right]_1^\infty + \frac{1}{a-\theta}\int_1^\infty x^{-a-1+\theta}dx \\ &= \frac{1}{a-\theta}\int_1^\infty x^{-a-1+\theta}dx = \frac{1}{a-\theta}\left[\frac{x^{-a+\theta}}{-a+\theta}\right]_1^\infty \\ &= \frac{1}{(a-\theta)^2}\left[\frac{-1}{x^{a-\theta}}\right]_1^\infty = \frac{1}{(a-\theta)^2}.\end{aligned}$$

Polo tanto a función $f(s) = s\int_1^\infty \frac{R(x)}{x^{s+1}}dx$ é holomorfa no semiplano $\sigma > \theta$.
Como

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{s}{s-1} + f(s), \quad \forall\,\sigma > 1,$$

a función $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ é holomorfa no semiplano $\sigma > \theta$ salvo en $s = 1$. Isto implica que $\zeta(s)$ non ten ceros neste semiplano, pois cada cero de $\zeta(s)$ da lugar a un polo de $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$.

2) $\Rightarrow$ 1). Consideremos a igualdade xa vista nun corolario previo dada por:

$$\psi(x) = x - \sum_{|\gamma<T|}\frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x\ln^2(xT)}{T}\right) + O\left(\ln x\right),\ T \geq 2,\ x \geq e.$$

Temos que $|x^\rho| = x^\beta < x^\theta$, e daquela:

$$\left|\sum_{\gamma<T}\frac{x^\rho}{\rho}\right| \leq \sum_{\gamma<T}\frac{|x^\rho|}{|\rho|} \leq \sum_{\gamma<T}\frac{x^\theta}{|\rho|} = x^\theta\sum_{\gamma<T}\frac{1}{|\rho|} = O\left(x^\theta\ln^2 T\right).$$

Polo tanto:

$$|\psi(x) - x| = O\left(x^\theta\ln^2 T + \frac{x\ln^2(xT)}{T} + \ln x\right).$$

Tomemos $T = x^{1-\theta}$, e consideremos polo momento o caso no que $x \geq e$ tal que $T \geq 2$, é dicir, $x \geq e^{\frac{\ln 2}{1-\theta}}$, xa que $\left(e^{\frac{\ln 2}{1-\theta}} \geq e\right)$. Dedúcese:

$$\begin{aligned}|\psi(x) - x| &\ll x^\theta(1-\theta)^2\ln^2 x + \frac{x(2-\theta)^2\ln^2 x}{x^{1-\theta}} + \ln x \\ &\ll x^\theta\ln^2 x + x^\theta\ln^2 x + \ln x \\ &\ll x^\theta,\ \text{ para } x \geq e^{\frac{\ln 2}{1-\theta}}.\end{aligned}$$

Consecuentemente, o anterior verifícase para todo $x \geq 2$.
Imos ver agora que de 1) se obtén a estimación indicada para $\pi(x)$.
Considerando as igualdades seguintes, conseguidas na proba do teorema 5.9:

$$S(x) = \pi(x) + O\left(\sqrt{x}\ln x\right),$$

$$S(x) = \int_2^x \frac{\psi(x)}{v\ln^2 v}dv + \frac{\psi(x)}{\ln x}.$$

Por hipóteses $\psi(v) = v + R(v)$, sendo $R(v) = \psi(v) - v$ e $|R(v)| \leq c'v^\theta \ln^2 v,\ c' > 0$. Logo:

$$S(x) = \int_2^x \frac{dv}{\ln^2 v} + \int_2^x \frac{R(v)}{v\ln^2 v}dv + \frac{x}{\ln x} + \frac{R(x)}{\ln x}.$$

Integrando por partes con $f = -v$, $dg = \dfrac{-dv}{v\ln^2 v}$, obtemos que;

$$\int_2^x \frac{dv}{\ln^2 v} + \frac{x}{\ln x} = \int_2^x \frac{dv}{\ln v} + \frac{2}{\ln 2},$$

e así

$$S(x) = \mathrm{Li}(x) + \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{R(v)}{v\ln^2 v} + \frac{R(x)}{\ln x},$$

co cal

$$\begin{aligned}
|S(x) - \mathrm{Li}(x)| &\leq \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{|R(v)|}{v\ln^2 v}dv + \frac{|R(x)|}{\ln x} \\
&\leq \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{c'v^\theta \ln^2 v}{v\ln^2 v}dv + \frac{c'x^\theta \ln^2 x}{\ln x} \\
&= \frac{2}{\ln 2} + c'\int_2^x v^{\theta-1}dv + c'x^\theta \ln x \\
&= \frac{2}{\ln 2} + c'\left[\frac{v^\theta}{\theta}\right]_2^x + c'x^\theta \ln x \\
&= \frac{2}{\ln 2} + c'\frac{x^\theta - 2^\theta}{\theta} + c'x^\theta \ln x \\
&\leq \frac{2}{\ln 2} + c'\frac{x^\theta}{\theta} + c'x^\theta \ln x \\
&\ll x^\theta \ln x.
\end{aligned}$$

Así pois

$$S(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(x^\theta \ln x\right)$$

e tendo presente que

$$S(x) = \pi(x) + O\left(\sqrt{x}\ln x\right),$$

das dúas anteriores séguese

$$\begin{aligned}
|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| &\leq |\pi(x) - S(x)| + |S(x) - \mathrm{Li}(x)| \\
&\ll \sqrt{x}\ln x + x^\theta \ln x \\
&\ll x^\theta \ln x,\ \left(\mathrm{pois}\frac{1}{2} \leq \theta\right).
\end{aligned}$$

É dicir,

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(x^{\theta} \ln x\right).$$

$\square$

Bibliografía

[1] E. Aparicio Bernardo, *Teoría de los números*
Servicio editorial de la Universidad del País Vasco, 1993.

[2] J.B. Conway, *Function of one complex variable.*
Springer, 1986.

[3] M.O. González, *Complex Analysis: selected topics.*
Marcel Dekker, 1992.

[4] A. Karatsuba, *Basic Analytic Number Theory.*
Springer-Verlag, 1983.

[5] A. Karatsuba, S.M. Voronin, *The Riemann Zeta-function.*
Walter de Gruyter, 1992.

[6] G. Rodicio, Antonio, *Notas de clase da materia "Teoría clásica de números".*
Manuscrito, Curso 2000-2001.

[7] W. Rudin, *Real Complex Analysis.*
McGraw-Hill, 1987.

[8] E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Reimann Zeta-function.*
Oxford Science Publications, 1986.