



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Cálculo Fraccionario e aplicacións

Marcos Villar Pazos

2014-2015

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

Cálculo fraccionario e aplicacións

Marcos Villar Pazos

Xullo 2015

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Análise matemática.
Título: Cálculo fraccionario e aplicacións.
Director: D. Juan José Nieto Roig
Breve descrición do contido
Xeneralización dos operadores de derivación e integración ordinarios a unha orde arbitraria ou fraccionaria e aplicación da transformada de Laplace á resolución de ecuacións diferenciais fraccionarias, así como o método de integración, xa coñecido, pero aplicado ó caso fraccionario.

Índice xeral

Agradecementos	VII
Resumo	VIII
Introdución	IX
Notación	XIII
1. Preliminares	1
1.1. A función gamma de Euler.	1
1.2. A función beta de Euler.	5
1.3. A transformada de Laplace	10
1.4. Convolución.	17
1.5. Aplicacións.	20
2. Integral e derivada fraccionaria.	29
2.1. Integral fraccionaria de Riemann-Liouville.	29
2.2. Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.	38
2.3. Derivada fraccionaria segundo Caputo.	47
2.4. Sobre a periodicidade da derivada e integral fraccionaria.	50
2.5. A función de Mittag-Leffler.	58
2.6. Aplicacións.	63
3. Aspectos relevantes do cálculo fraccionario.	75
3.1. Relación ca distribución dos números primos.	75
3.2. Ecuacións reacción-difusión da física-matemática.	79
Bibliografía	83

Agradecementos

Gustárame ter un momento, moi breve, de agradecemento por ter a oportunidade de escribir este traballo fin de máster, algo polo que me considero plenamente afortunado. Tamén de ter a compañía, nos bos e malos momentos, de todas as persoas involucradas no funcionamento da facultade, como son as persoas dedicadas ás tarefas administrativas, os docentes e os propios alumnos, compañeiros todos eles de moitas fatigas.

Como estudante do máster en matemáticas, agradezo os coñecementos transmitidos por parte dos profesores ó longo do mesmo, así como a paciencia da que en non poucas ocasións fixeron gala. En xeral, considérome moi afortunado pola experiencia vivida, e espero facer un bó uso da ensinanza recibida.

Dedicatoria:

A miúdo na vida temos que facer fronte a situacións adversas, como nas matemáticas, e aqueles que ante as circunstancias descritas se sobrepoñen, fanse chamar loitadores.

A MIÑA NAI, UNHA LOITADORA

Resumo

No presente traballo preténdese dar unha xeneralización dos operadores de derivación e integración ordinarios a unha orde arbitraria, non só unha orde natural, como ata agora estabamos acostumados. Para tal fin é necesario introducir as funcións gamma e beta de Euler, cuxas propiedades non pasarán desapercibidas ó longo do mesmo. Importantes de por sí, na teoría fraccionaria non o son menos. A xeneralización a unha orde arbitraria de integración pasa, como non, por Euler e a súa función gamma. Introducidas estas funcións, o seguinte paso é coñecer como a transformada de Laplace aparece de xeito adecuado na resolución de ecuacións diferenciais ordinarias, e non menos importante é o concepto de convolución, que tamén introducimos, o cal está estreitamente relacionado co operador de Laplace, como veremos.

Xeneralizado o cálculo ordinario a unha orde arbitraria, centrámonos no que segue en recalcar as propiedades dos operadores de integración e derivación fraccionaria. Tales operadores, nalgúns casos, perden propiedades universais con respecto aos ordinarios, pero a cambio incorporan outras características que ó longo do traballo iremos remarcando. Como é unha máxima no traballo, calculamos a transformada de Laplace de todos eles, co fin de aplicar o método da transformada de Laplace ó de resolución de ecuacións diferenciais fraccionarias, EDF.

Abstract

In this work our main aim is to give a generalization of the operators of differentiation and integration to an arbitrary order, not just a natural order, as usual we were accustomed. In order to get our goal we need to introduce the functions gamma and beta of Euler, whose properties do not go unnoticed during the same. Important in their self, in the fractional theory are not less. The generalization to an arbitrary order of integration is, of course, due to Euler and his function gamma. Introduced these functions, the next step is to learn how the Laplace transform appears appropriately in solving ordinary differential equations, and not least important is the concept of convolution, which is introduced and is closely related to the Laplace operator.

Generalized ordinary calculation to an arbitrary order, we focus on what continues to emphasize the properties of operators of fractional integration and derivation. Such operators, in some cases, lose universal properties with respect to the ordinary, but instead incorporate other features throughout the work will remarking. As is especially at work, we calculate the Laplace transform all of them in order to apply the method of the Laplace transform to solve differential equations fractional, FDE.

Introdución

Dada unha función diferenciable f , definida nun intervalo (a, b) , a derivada D asigna a f unha nova función $Df(x) = f'(x)$. Derivando novamente $D(Df(x)) = Df'(x) = f''(x)$.

En xeral a derivada n -ésima de f é $D^n f(x) = D(D^{n-1}f(x)) = f^{(n)}(x)$, sendo n un enteiro positivo.

A notación de Leibniz, introducida en 1695 nun artigo seu, para referirse á derivada n -ésima dunha función:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x),$$

deu lugar a formular preguntas como que ocorrería se $n = \frac{1}{2}$, feita por L'Hopital.

Esta pregunta, en principio inofensiva, rapidamente foi reformulada no seguinte contexto:

¿ Podería ser n calquera número: real, complexo, irracional...?

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é unha función continua, a primitiva de f é a función

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x f(t)dt$$

que denotaremos por $If(x)$. Pódese integrar novamente considerando a función $I(I f(x)) = I^2 f(x)$.

En xeral a primitiva n -ésima de f será $I^n f(x) = I(I^{n-1}f(x))$.

Veremos que $I^n f(x)$ pódese expresar como unha integral da función f dando lugar á fórmula integral de Cauchy para as integrais repetidas:

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^{x_{n-1}} \dots \int_0^{x_1} f(t) dt dx_1 \dots dx_{n-1} &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \\ &= I^n f(x), \end{aligned}$$

onde Γ denota a función gamma de Euler.

En 1730 a pregunta plantada por L'Hopital parece ser que despertou a curiosidade de Euler, quen tratou de xeneralizar a función factorial, $\Gamma(n) = (n-1)!$, a valores non enteiros. Este obxectivo cumpriuno a través da **función gamma de Euler**, de especial transcendencia na teoría global matemática, e en particular, na fraccionaria.

A raíz de aquí, a expresión anterior podería ser xeneralizada a un orde arbitrario $\alpha > 0$, e é a que marcara o inicio do **cálculo fraccionario**.

Nace así a expresión:

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

e coñécese como **integral fraccionaria de orde α de Riemann-Liouville**.

Como vemos o enfoque de Riemann-Liouville atopou a súa razón de ser a través do concepto de integración repetida, e a posterior xeneralización a unha orde arbitraria a través da función gamma de Euler. Unha mesma importancia quixeron descubrir no senso da derivada fraccionaria, e o mesmo instinto matemático, baseado nos anteriores, foi usado para tal fin, o que levou a xeneralizar a derivada clásica a unha orde fraccionaria do seguinte xeito:

$$[D^\alpha f](x) = [D^n I^{n-\alpha} f](x),$$

onde $n = [\alpha] + 1$ se $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $n = \alpha$ se $\alpha \in \mathbb{N}$, e tamén se denomina **derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orde α** .

Estes operadores de derivación e integración fraccionaria cobran especial protagonismo nun novo marco de ecuacións diferenciais: **as ecuacións diferenciais fraccionarias**.

No **capítulo primeiro** introducimos as funcións gamma e beta de Euler, así como as súas propiedades máis relevantes. Ámbalas dúas cobran especial protagonismo, tanto na xeneralización a unha orde de integración e derivación arbitraria, como nas propiedades destes operadores. Seguidamente, co fin de describir un método que permita resolver ecuacións diferenciais de orde fraccionario, introducimos unha nova ferramenta de resolución baseado no concepto de transformada integral.

O concepto de transformada, como o seu propio nome indica, consiste en transformar unha función dada noutra función. Na física matemática son de especial importancia as transformadas integrais:

$$F(p) = \int_a^b K(t, p) f(t) dt.$$

De $K(t, p)$ dise que é o **núcleo** da transformación e $F(p)$ é a **transformada**.

A elección do núcleo e dos límites de integración da lugar a distintas transformadas, sendo unha delas a que nesta primeiro capítulo introducimos: **a transformada de Laplace**.

Descritas as súas propiedades, de entre as que destaca o **teorema de convolución**, así como a súa aplicación á hora de resolver ecuacións diferenciais, en principio de orde enteiro, ó final deste primeiro capítulo pónense de manifesto todas elas a través de exemplos que ilustren a teoría descrita. De entre eles, de especial relevancia histórica, é o **problema mecánico de Abel**, que describiremos, e veremos como a transformada de Laplace intervéñ de forma decisiva na súa resolución.

No **capítulo dous** introducimos a xeneralización dos operadores de derivación e integración ordinaria a unha orde arbitraria. Recalcadas as propiedades máis relevantes, tanto no caso fraccionario da integral como no da derivada, a continuación obtemos as súas transformadas de Laplace para posterior aplicación á resolución de ecuacións diferenciais fraccionarias, especialmente útil neste contexto. A aplicación deste método de resolución de ecuacións diferenciais fraccionarias, ao igual que no ordinario, caracterízase principalmente porque na súa aplicación tómanse en consideración as condicións iniciais, de xeito que, nos problemas de valor inicial, obtense inmediatamente a solución particular, evitando así a determinación dunha solución xeral, e posterior cálculo das constantes.

A aplicación deste método, que no caso ordinario atopa unha interpretación física clara, non atopa o seu homólogo no caso da derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, pois conxuntamente co operador de Laplace require o emprego de condicións iniciais de orde fraccionario, por exemplo, do tipo:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0^+} D^{\alpha-1} f(t) = b_1, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} D^{\alpha-2} f(t) = b_2, \\ \vdots \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} D^{\alpha-n} f(t) = b_n. \end{cases}$$

Así pois, aínda que os problemas de valor inicial nos que a derivada fraccionaria de Riemann-Liouville cobra protagonismo poden ser resolto de forma xeitosa, a súa solución é pouco útil, no senso que non é clara a interpretación física cas condicións anteriormente descritas. Isto plantou a necesidade de dar novas definicións de derivadas fraccionarias que consideraran interpretacións físicas nun xeito natural, como os problemas da época requirían.

Previsto por Liouville, a testemuña foi recollida por M. Caputo, que introduciu unha nova definición de derivada fraccionaria que aplicada conxuntamente co operador de Laplace, tiña a vantaxe con respecto á anterior, que unicamente requiría coñecer os valores iniciais da función f considerada e das súas sucesivas derivadas de orde enteiro, $f(0), f'(0), \dots$.

Estamos falando da seguinte definición de derivada fraccionaria segundo Caputo:

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha f(x) &= I^{n-\alpha} (D^n f)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt, \end{aligned}$$

Ante este novo marco de cálculo con operadores de orde fraccionaria ou arbitraria, tratamos ao longo do capítulo dous establecer as similitudes e diferencias que gardan cos operadores de derivación e integración ordinaria, como o lector poderá comprobar. A maioría de exemplos, van destinados a tal fin, e poñerán de manifesto como propiedades universais no senso clásico, non se conservan en xeral, ao pasar a unha orde de integración ou derivación fraccionaria.

Debido a súa importancia dentro do mundo do cálculo fraccionario, tamén introducimos ó final do capítulo a familia des **funcións de Mittag-Leffler**. Así como a exponencial xorde dun xeito natural como solución de ecuacións diferenciais de orde natural, este papel ven sendo representado no mundo fraccionario polas funcións de Mittag-Leffler, presentándose como solución natural de ecuacións diferenciais fraccionarias. Veremos como a función de Mittag-Leffler é unha xeneralización de moitas funcións coñecidas, e de feito, a propia exponencial pode ser vista coma un caso particular da mesma.

Como é costume neste traballo, na sección de aplicacións, e última do capítulo dous, expóñense exemplos que poñen en escena a teoría desenrolada.

No referente ao operador de integración fraccionaria, describiremos un método que permitirá resolver algunhas ecuacións diferenciais fraccionarias.

Para dar senso á necesidade da teoría fraccionaria, a derivada fraccionaria cobra especial protagonismo na ecuación de **Bagley-Torvik**, que ven describindo o movemento dunha placa de masa m somerxida nun fluído newtoniano. Aquí dita derivada aparece dun xeito natural, sen ser obra da nosa elección, cobrando así especial protagonismo na modelaxe dun fenómeno físico real.

No **capítulo tres**, e último, a relevancia do cálculo fraccionario adquire unha matiz especial. Dúas ecuacións diferenciais fraccionarias cobran aquí protagonismo: **a ecuación de sub-difusión e as ecuacións de reacción-difusión da física-matemática**.

No referente a primeira, establécese a relación entre o cálculo fraccionario, a función zeta de Riemann e os números primos, e consecuentemente ca **Hipóteses de Riemann**.

No referente a segunda, destácase a importancia de usar para a modelaxe de certos fenómenos de dispersión, como por exemplo un fenómeno contaminante, o cálculo fraccionario. As solucións analíticas son dunha complexidade extraordinaria, como o lector poderá comprobar, sendo nas mesmas protagonista a **función de Mittag-Leffler**.

Por último, gustaríame nomear a bibliografía empregada, posta na memoria deste traballo, para á realización do mesmo:

Capítulo 1: [2], [4] e [7].

Capítulo 2: [1], [2], [3], [5], [6] e [8].

Capítulo 3: [9] e [10].

Ademais do descrito con anterioridade, aparte da teoría matemática desenrolada, tamén tratei de dar un enfoque histórico ó traballo, motivando as definicións de acordo co contexto histórico da época, así como a necesidade das mesmas. Neste marco, tampouco esquecín a vida dos protagonistas, matemáticos dos que moitas veces só temos en conta os seus logros, sen saber nada acerca deles, as súas vidas, crenzas,

As distintas gráficas que se van mostrando foron realizadas co programa **Geogebra**.

Naturalmente, calquera erro de cálculo ou comprensión e achacable ó que subscribe, en ningún caso ás referencias mencionadas.

Notación

Sexa $\Omega = [a, b]$ con $(-\infty < a < b < \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}$. Escribiremos $L_p(a, b)$, $1 \leq p < \infty$, para referirnos o espazo de funcións Lebesgue medibles f sobre Ω para as cales $\|f\|_p < \infty$, sendo:

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty).$$

Se escribimos $AC[a, b]$, entenderemos que nos estamos referindo o espazo de funcións f as cales son absolutamente continuas sobre $[a, b]$.

É un feito coñecido o seguinte:

$$f \in AC[a, b] \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \phi(t) dt \quad (\phi(t) \in L_1(a, b)),$$

sendo $\phi(t) = f'(t)$ e $c = f(a)$.

Para $n \in \mathbb{N}$ o espazo a $AC^n[a, b]$ vai caracterizar as funcións f que teñen derivada absolutamente continua ata orde $n - 1$ sobre $[a, b]$, isto é:

$$AC^n[a, b] = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tales que } D^{n-1}f(x) \in AC[a, b], \left(D = \frac{d}{dx} \right) \right\}.$$

En relación aos operadores de orde fraccionaria que introducimos a partir do capítulo dous, existen diversas definicións sobre os mesmos. Non é obxectivo deste traballo enuncialas todas, pero se mostraremos algunha a continuación para entender a notación empregada neste traballo.

Para $f \in L_1(a, b)$ as integrais:

$$\left[{}^{RL}I_{a+}^\alpha f \right] (x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a,$$

$$\left[{}^{RL}I_{b-}^\alpha f \right] (x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad b > x,$$

coñécense como integrais fraccionarias de Riemann-Liouville de orde $\alpha > 0$.

Para funcións $f(x)$ definidas nun intervalo $[a, b]$ as expresións:

$$\left[{}^{RL}D_{a+}^\alpha f \right] (x) = \left[D^n I_{a+}^{n-\alpha} f \right] (x), \quad n-1 \leq \alpha < n,$$

$$\left[{}^{RL}D_{b-}^\alpha f \right] (x) = \left[D^n I_{b-}^{n-\alpha} f \right] (x), \quad n-1 \leq \alpha < n,$$

son coñecidas como as derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville de orde $\alpha > 0$, pola esquerda e pola dereita, respectivamente.

Como digo, non son únicas, e debido a que diversos autores ofrecen definicións de operadores fraccionarios de orde α , é moi común acompañalos cas iniciais dos mesmos, neste caso RL, pero isto en xeral omitirémolo, e de darse o caso de ter que diferenciar entre algunha definición, especificarémolo.

No presente traballo centramos nos operadores de integración e derivación fraccionaria de orde $\alpha > 0$ de Riemann-Liouville, concretamente no caso en que $a = 0$. E por iso que facilitaremos a notación do seguinte xeito:

$$\left[{}^{RL}I_0^\alpha f \right] (x) = I^\alpha f(x),$$

e

$$\left[{}^{RL}D_0^\alpha f \right] (x) = D^\alpha f(x), \quad n-1 \leq \alpha < n.$$

No que a derivada fraccionaria se refire, tamén introduciremos unha definición ofrecida por M. Caputo, para distinguila escribiremos ${}^C D^\alpha f(x)$. Os detalles relativos a súa interpretación con respecto a derivada fraccionaria de Riemann-Liouville están postos de manifesto ó longo do traballo, polo que non os especificaremos aquí.

No que respecta aos operadores de orde fraccionario, convén estar familiarizado cos seguintes espazos:

$$I_{a+}^\alpha(L_p) = \{f : f = I_{a+}^\alpha \phi, \phi \in L_p(a, b)\},$$

$$I_{b-}^\alpha(L_p) = \{f : f = I_{b-}^\alpha \phi, \phi \in L_p(a, b)\},$$

$$L^\alpha(a, b) = \{f \in L_1(a, b) : D^\alpha f \in L_1(a, b)\}.$$

Capítulo 1

Preliminares

1.1. A función gamma de Euler.

Nesta sección temos como único obxectivo recordar algunhas das propiedades da función gamma de Euler. De especial transcendencia na teoría global matemática, esta función foi introducida por primeira polo matemático suízo Leonhard Euler co obxectivo de xeneralizar a función factorial a valores non enteiros. A súa importancia adquiriu notable fama, da que hoxe en día aínda fai gala, e foi por iso que numerosos matemáticos involucráronse no estudo da mesma. De entre eles poderíamos citar a Gauss, Legendre, Liouville ou Weierstrass.

Dita función pertence á categoría de funcións transcendentais especiais, e algunhas constantes matemáticas, digamos curiosas, como o número π , atopan a súa representación a través da mesma. Entre as distintas áreas de estudo nas que aparece, poderíamos destacar a teoría da función zeta de Riemann, teoría de números, aplicación na resolución de integrais impropias, series hiperxeométricas..., e como non, no traballo presente cobra especial protagonismo á hora de estender os operadores de integración e derivación ordinarios a unha “**orde arbitraria**”. Verémolo...

Comezamos introducindo a súa definición mediante a súa representación integral:

Definición 1.1. A función gamma de Euler $\Gamma : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ defínese como:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \text{ para } x > 0.$$

Esta é unha boa definición no senso de que o integrando representa unha función integrable.

En efecto, poñamos:

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = I_1 + I_2,$$

e vexamos que cada unha das integrais do lado dereito son converxentes.

Para I_1 se $x \geq 1$ o integrando representa unha función continua, e polo tanto integrable. Quizais o caso de especial interese é considerar valores de x tales que $0 < x < 1$.

Así, para $t > 0$ temos que:

$$0 < t^{x-1} e^{-t} < t^{x-1},$$

e como

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{x-1} dt &= \lim_{y \rightarrow 0} \int_y^1 t^{x-1} dt = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{t^x}{x} \right) \Big|_y^1 \\ &= \frac{1}{x}, \quad x > 0, \end{aligned}$$

é converxente, polo criterio de comparación, I_1 tamén o é.

Doutra banda, para $x > 0$ tomando $f(t) = e^{-t} t^{x-1}$ e $g(t) = t^{-2}$ resulta que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-t} t^{x-1}}{t^{-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0,$$

e polo criterio de comparación por paso ó límite, a integral I_2 ten o mesmo carácter que $\int_1^\infty t^{-2} dt$, a cal resulta ser converxente.

Comprobada esta boa definición, antes de involucrarnos nas propiedades da función gamma de Euler, recalcamos dúas representacións integrais coñecidas como funcións gamma incompletas.

Nunha delas varía o límite varía o límite inferior de integración:

$$\Gamma(x, y) = \int_y^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad y > 0.$$

Na outra, ocorre que:

$$\gamma(x, y) = \int_0^y e^{-t} t^{x-1} dt, \quad y > 0.$$

Vexamos entón as principais propiedades da definición 1.1.

Propiedades:

G1): (Ecuación funcional) Para $x > 0$ cúmprese que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Sexan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $0 < \alpha < \beta$.

Facendo integración por partes na integral

$$\int_\alpha^\beta e^{-t} t^x dt,$$

con $u = t^x$, logo $du = xt^{x-1}dt$, e $dv = e^{-t}dt$ logo $v = -e^{-t}$, esta convértese en

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta e^{-t} t^x dt &= (-t^x e^{-t})_\alpha^\beta + x \int_\alpha^\beta e^{-t} t^{x-1} dt \\ &= \alpha^x e^{-\alpha} - \beta^x e^{-\beta} + x \int_\alpha^\beta e^{-t} t^{x-1} dt, \end{aligned}$$

que pasando límites cando $\alpha \rightarrow 0^+$ e $\beta \rightarrow +\infty$, a ambos lados, resulta

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x).$$

G2): Consecuencia da definición, $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y e^{-t} dt = \lim_{y \rightarrow \infty} (-e^{-t}) \Big|_0^y = 1.$$

Tamén, facendo integración por partes, resulta

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= \int_0^\infty e^{-t} t dt = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y e^{-t} t dt \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left[(-te^{-t}) \Big|_0^y + \int_0^y e^{-t} dt \right] = \int_0^\infty e^{-t} dt \\ &= \Gamma(1) = 1. \end{aligned}$$

G3): Se $n \in \mathbb{N}$, entón $\Gamma(n+1) = n!$.

Dado que para todo $x > 0$ se cumpre que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, en particular para $n \in \mathbb{N}$, será

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &\vdots \\ &= n(n-1)(n-2) \cdots 2\Gamma(1) \\ &= n!, \end{aligned}$$

pois $\Gamma(1) = 1$.

Para $n = 0$, defínese $0! = \Gamma(1) = 1$.

G4): (Fórmula de duplicación) Para cada número natural,

$$\Gamma(2n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Primeiramente imos ver que $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) \\
 &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \left(n - \frac{5}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{5}{2}\right) \\
 &\vdots \\
 &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \left(n - \frac{5}{2}\right) \cdots \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2^n} (2n-1)(2n-3)(2n-5) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{(2n-1)!!}{2^n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}}{2^n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right),
 \end{aligned}$$

onde usamos a identidade $(2n-1)!! = \frac{(2n-1)!}{(2n-2)!!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

Por outra banda

$$\begin{aligned}
 \Gamma(2n) &= \Gamma(2n-1+1) = (2n-1)! \\
 &= (2n-1)(2n-2)(2n-3) \cdots n\Gamma(n).
 \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
 \frac{\Gamma(n)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2n)} &= \frac{\Gamma(n) \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(2n-1)(2n-2)(2n-3) \cdots n\Gamma(n)} \\
 &= \frac{\Gamma(n) 2n(2n-1)(2n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{2n}n!(2n-1)(2n-2)(2n-3) \cdots n\Gamma(n)} \\
 &= \frac{2}{2^{2n}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).
 \end{aligned}$$

En fin,

$$\frac{\Gamma(n)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2n)} = \frac{2}{2^{2n}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Gamma(2n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{2n-1} \Gamma(n)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

G5): Verifícase que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Da definición 1.1, será

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt,$$

que tomando o cambio de variable $u = t^{\frac{1}{2}}$, esta convértese en:

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^\infty e^{-u^2} \frac{1}{u} 2u du \\
 &= 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = 2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \\
 &= \sqrt{\pi},
 \end{aligned}$$

onde empregamos o resultado ben coñecido:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

e o feito de que $f(t) = e^{-t^2}$ é claramente unha función par, co cal

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

de onde

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Hai máis caracterizacións sobre a función gamma de Euler, que de seguro facilitarán se cabe aínda máis a comprensión das anteriormente descritas, pero a súa proba require desenrolar unha teoría sobre produtos infinitos que non é obxectivo deste traballo.

De entre elas, destacamos as seguintes:

G6): A súa definición como produto infinito, consecuencia do teorema de factorización de Weierstrass:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}},$$

onde γ é a constante de Euler.

G7): (A fórmula de Euler)

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}, \quad x > 0.$$

G8): (A fórmula de Gauss)

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}, \quad x > 0.$$

G9): (Fórmula de complemento) Para $x > 0$ non enteiro, verifícase:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Destacadas estas propiedades, tratamos a continuación de introducir unha función non menos especial, e estritamente relacionada ca gamma de Euler:

1.2. A función beta de Euler.

Nesta sección introducimos a función beta de Euler, así como as súas propiedades máis salientables, que aparecerán dun xeito natural a través das debidas xustificacións das definicións que iremos ofrecendo.

Dada unha función f , en ocasións pode resultar ser útil expresar $f(x+y)$ en termos de $f(x)$, $f(y)$, tal como ocorre ca función exponencial:

$$e^{x+y} = e^x e^y.$$

Esta observación vainsos permitir dar unha xustificación da definición da función beta de Euler, que a continuación introducimos:

Definición 1.2. A función $\beta : (0, \infty) \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x, y > 0,$$

denomínase función beta de Euler.

Esta é unha boa definición no senso que o integrando representa unha función integrable.

En efecto, poñamos:

$$\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = I_1 + I_2,$$

e vexamos que cada unha das dúas integrais do lado dereito son converxentes.

Para ilo imos considerar o criterio de comparación por paso ó límite.

Consideramos $f, g : [0, \frac{1}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por:

$$f(t) = t^{x-1} (1-t)^{y-1}, \quad g(t) = t^{x-1}.$$

Como

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{t^{x-1}} = 1,$$

polo devandito criterio, I_1 ten o mesmo carácter que a integral $\int_0^{\frac{1}{2}} g(t)dt$. Pero:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{1-x}} dt,$$

é converxente se, e só se, $1-x < 1$, é dicir, se, e só se, $x > 0$.

Para verificar que a segunda integral é converxente, o razoamento é análogo, salvo o dominio de definición que agora é $[\frac{1}{2}, 1)$ e $g(t) = (1-t)^{y-1}$.

Como

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{(1-t)^{y-1}} = 1,$$

I_2 ten o mesmo carácter que a integral:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{y-1} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-t)^{1-y}} dt,$$

que tamén sabemos que é converxente se, e só se, $1-y < 1$, é dicir, se, e só se, $y > 0$.

En definitiva:

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad \text{é converxente} \Leftrightarrow x, y > 0,$$

o que corrobora a boa definición.

Consideremos agora na definición da función beta o cambio:

$$u = \frac{t}{1-t} \Rightarrow t = \frac{u}{1+u} \Rightarrow dt = \frac{1}{(1+u)^2} du.$$

Entón:

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt &= \int_0^\infty \left(\frac{u}{1+u} \right)^{x-1} \left(\frac{1}{1+u} \right)^{y-1} \frac{du}{(1+u)^2} \\ &= \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du. \end{aligned} \tag{1}$$

Afirmamos que:

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^{\alpha-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{p^\alpha}.$$

En efecto, tomando $u = pt \Rightarrow t = \frac{u}{p} \Rightarrow dt = \frac{du}{p}$, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-pt} t^{\alpha-1} dt &= \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{p} \right)^{\alpha-1} \frac{du}{p} \\ &= \frac{1}{p^\alpha} \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)}{p^\alpha}. \end{aligned}$$

Facendo $p = 1+u$, $\alpha = x+y$ do anterior dedúcese:

$$\frac{1}{(1+u)^{x+y}} = \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty e^{-(1+u)t} t^{x+y-1} dt,$$

que substituíndo en (1),

$$\begin{aligned}
 \beta(x, y) &= \int_0^\infty u^{x-1} \left(\frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty e^{-(1+u)t} t^{x+y-1} dt \right) du \\
 &= \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty e^{-t} t^{x+y-1} \left(\int_0^\infty e^{-ut} u^{x-1} du \right) dt, \text{ (Fubini)} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty e^{-t} t^{x+y-1} \frac{\Gamma(x)}{t^x} dt, \text{ (pola afirmación)} \\
 &= \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty e^{-t} t^{y-1} dt \\
 &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.
 \end{aligned}$$

O cálculo mostrado pon de manifesto as dúas seguintes propiedades fundamentais da función beta:

B1) $\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$

B2) $\beta(x, y) = \beta(y, x).$

Se consideramos o cambio $t = \sin^2 \theta$ na integral

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt,$$

onde $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \int_{\theta_1}^{\theta_2} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt &= 2 \int_{\arcsen \sqrt{\theta_1}}^{\arcsen \sqrt{\theta_2}} \sin^{2x-2}(\theta) \cos^{2y-2}(\theta) \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \\
 &= 2 \int_{\arcsen \sqrt{\theta_1}}^{\arcsen \sqrt{\theta_2}} \sin^{2x-1}(\theta) \cos^{2y-1}(\theta) d\theta,
 \end{aligned}$$

que pasando límites cando $\theta_1 \rightarrow 0^+$, $\theta_2 \rightarrow 1^-$:

$$\beta(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta) \cos^{2y-1}(\theta) d\theta,$$

obtendo así unha forma análoga á definición 1.2.

A xustificación de expresar a función beta deste xeito tamén a atopamos na función gamma.

Dados $x, y > 0$, da representación integral da función gamma temos:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty e^{-s} s^{x-1} ds \int_0^\infty e^{-t} t^{y-1} dt \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(s+t)} s^{x-1} t^{y-1} ds dt.
 \end{aligned}$$

Facendo $t = u^2$ e $s = v^2$, logo $dt = 2u du$ e $ds = 2v dv$, quedáanos:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} v^{2x-2} u^{2y-2} 2v 2u dv du \\
 &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} v^{2x-1} u^{2y-1} du dv, \text{ (Fubini)}
 \end{aligned}$$

que pasando a coordenadas polares con $u = r \cos(\theta)$ e $v = r \sin(\theta)$, resulta:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4 \int_0^\infty r^{2(x+y-1)} e^{-r^2} r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta) \cos^{2y-1}(\theta) d\theta.$$

Por último, tomando $t = r^2$, logo $dr = \frac{dt}{2r}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x)\Gamma(y) &= 2 \int_0^\infty t^{x+y-1} e^{-t} dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta) \cos^{2y-1}(\theta) d\theta \\
 &= 2\Gamma(x+y) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta) \cos^{2y-1}(\theta) d\theta,
 \end{aligned}$$

é dicir,

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta) \cos^{2y-1}(\theta) d\theta,$$

e da propiedade **B1** obtense o desexado.

As propiedades descritas relativas ás funcións gamma e beta de Euler son de seguro coñecidas. Ámbalas dúas xogan un papel moi importante á hora de xeneralizar os operadores de integración e derivación ordinarios a unha orde arbitraria $\alpha > 0$. Non só permitirían abarcar tal xeneralización, senón que tamén permiten describir propiedades transcendentales dos devanditos operadores. Todo isto verémolo

Na bibliografía posta na memoria do traballo, poden refutarse, concretamente no libro de Karatsuba, etiquetado como [2], ou no de Podlubny, que ven sendo [6], aínda que existe unha ampla bibliografía matemática onde poden ser consultadas.

Recensión matemática: Leonhard Paul Euler (1707 – 1783). Foi un matemático e físico suízo. O análise matemático é testemuña dun dos grandes xenios da historia. A notación $f(x)$, a fórmula $e^{\pi i} + 1 = 0$, as funcións trigonométricas, a definición do número e , a irracionalidade de $\zeta(2)$, a unidade imaxinaria i , e un longo etcétera, son algunhas das marabillas cas que nos podemos deleitar ó abrir algún texto matemático.

Ó longo da súa vida a súa investigación matemática veu a supoñer ó redor de 800 publicacións anuais. Ningún matemático superou xamais a produción de Euler, a quen o académico francés François Arago alcumou “O análise encarnado”. Durante case medio século despois da súa morte continuaron aparecendo obras inéditas de Euler nas publicacións da Academia de San Petersburgo.

Pronto adquiriu fama internacional. A súa facilidade para realizar cálculos que involucraban cifras moi elevadas era notable. Cóntase que sabía de memoria as seis primeiras potencias dos cen primeiros números. Os seus alumnos recorrían a el para corroborar certos cálculos de series infinitas quedando pasmados ca ferramenta de cálculo de seu profesor.

A pesar de ser un gran xenio non presumía dilo. A súa persoa era respectada por personaxes da alta nobreza. De feito recibía invitacións constantes de diversos países para traballar alí.

Durante a invasión rusa a Alemaña o exército saqueou unha granxa que era da súa propiedade. O acto chegou a coñecemento do xeneral e a perda foille rapidamente repostada, inclusive foi obsequiado con 4000 floríns pola emperatriz Isabel cando se decatou do sucedido.

A produción matemática de Euler englobaba as matemáticas como un todo común. Practicamente todas as fronteiras matemáticas, tanto pura como aplicada, dos niveis máis elementais ata os máis avanzados, foron testemuña da súa pluma. A notación matemática empregada hoxe en día pódese afirmar que é máis debida a Euler que a ningún outro matemático ó longo da historia.

A vista de Euler viuse en decaída a partir dos seus 30 anos. Durante un acto de guerra, o fogo cruzado provocou chamas de lume na casa de Euler. Un compatriota, Peter Grim, salvou a Euler do lume, estaba practicamente cego. Aínda que se perderon algúns libros, salvouse a súa vida, moito máis importante, e algúns dos seus escritos máis prezados. Unha operación devolveulle a vista, pero esa alegría duroulle ben pouco. Os últimos dezasete anos da súa vida pasounos sen apenas visión, pero nin esa traxedia conseguiu interromper a súas investigacións e publicacións científicas.

Faleceu en 1783 a idade de 76 anos, de maneira case repentina mentres tomaba té e xogaba cun dos seus netos.

Neste traballo, como vimos advertindo, as definicións establecidas sobre a función gamma e beta de Euler, así como as súas propiedades, permitirán xeneralizar os operadores de integración e derivación a unha orde arbitraria $\alpha > 0$.

1.3. A transformada de Laplace

O concepto de transformada, como o seu propio indica, consiste en transformar unha función noutra función.

En realidade isto non é de todo novo:

- i) A derivada D asigna a unha función diferenciable definida nun intervalo (a, b) unha nova función $Df = f'$.
- ii) Tamén a integral I asigna a unha función continua f definida nun intervalo (a, b) unha nova función

$$If(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Neste contexto, resultan de especial interese aquelas transformadas que sexan lineais, e dicir, para f e g funcións dadas, a súa transformación T verificará:

$$T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Na física matemática, son de gran importancia as transformadas integrais que fan corresponder a unha función $f(t)$ outra función:

$$F(p) = \int_a^b K(t, p)f(t)dt.$$

De $K(t, p)$ dise que é o **núcleo** da transformación e $F(p)$ é a **transformada**.

A elección do núcleo e dos límites de integración da lugar a distintas transformadas, sendo unha delas a que nesta sección presentamos: **a transformada de Laplace**.

Aquí, dita transformada proporcionará un método moi útil para a resolución das ecuacións diferenciais lineais que frecuentemente aparecen en problemas relativos á enxeñería.

Os pasos a seguir describirémolos na sección de aplicacións do presente capítulo.

Unha das principais vantaxes deste método reside no feito de que durante a súa aplicación tómanse en consideración as condicións iniciais de xeito que, nos problemas de valor inicial, obtense inmediatamente a solución particular, evitando así a determinación dunha solución xeral, composta dunha particular máis unha homoxénea, e posterior cálculo das constantes, como na carreira acostumábase.

Pero non todo son vantaxes. Este método operacional pode dar lugar a resultados erróneos, se non temos en conta o coñecemento da teoría que os establece, pois a facilidade mecánica da súa aplicación invita a ilo.

En [7] da bibliografía advírtese deste feito.

Nun enfoque histórico, as transformadas integrais en matemáticas aplicada teñen a súa orixe nos métodos clásicos de Fourier e nos métodos operacionais de Heaviside (1850-1925). Ámbolos dous son de sobra coñecidos por calquera de nós, pero se cabe, referíndonos ó último, cabe mencionar que empregou métodos non correntes da súa propia invención para resolver os seus propios problemas. Oliver Heaviside, xenio solitario, non posuía formación universitaria, e por iso que, os contemporáneos da época non consideraban os seus métodos como eficaces, aínda que funcionaban.

Hoxe en día a aplicación de métodos operacionais na análise matemática, que orixinariamente foron introducidos por Leibniz, son tan antigos como o propio cálculo, pero o seu uso, amplamente estendido na tecnoloxía moderna, débense máis a Heaviside que a calquera outro matemático da nosa historia.

Sen máis preámbulos...

Definición 1.3. A transformada de Laplace dunha función $f(t)$ definida en $(0, \infty)$ é unha función $\mathcal{L}[f(t)]$ obtida mediante a seguinte transformación integral:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = F(p), \quad \text{para } p > 0$$

O parámetro p pode ser tomado como un número complexo, $p = \sigma + i\tau$, e en tal caso $p > 0$ tomaría protagonismo como $\text{Re}(p) > 0$.

Á vista da definición é claro que a transformada de Laplace está suxeita á existencia da integral impropia do lado dereito, é dicir, a que:

$$\exists \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-pt} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt.$$

A continuación establecemos unhas definicións ben coñecidas co fin de enunciar unha condición suficiente de existencia de transformada de Laplace.

Definición 1.4. Dise que unha función $f(t)$ é continua a cachos en (a, b) con $a, b \in \mathbb{R}$, se $f(t)$ é continua en tódolos os puntos de (a, b) agás nun número finito deles, nos que $f(t)$ deberá ter límites laterais finitos.

Noutras palabras se $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ é unha partición do intervalo (a, b) entón:

- i) $f(t)$ é continua en cada (x_{i-1}, x_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$,

ii) e existen:

$$\lim_{t \rightarrow x_i^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow x_{i-1}^+} f(t),$$

con $i = 1, 2, \dots, n$, $a = x_0$ e $b = x_n$.

Diremos que $f(t)$ é continua a cachos en $[0, \infty)$ se o é en $[0, T]$ $\forall T > 0$.

Definición 1.5. Dise que unha función $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é de orde exponencial α cando $t \rightarrow \infty$, se existen constantes positivas T e M tales que $|f(t)| < Me^{\alpha t}$, $\forall t \geq T$.

Por exemplo, a función $f(t) = e^{t^2}$ non é de orde exponencial α , pois calquera que sexa α tense que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{t^2}}{e^{\alpha t}} = \infty.$$

Teorema 1.6. Se $f(t)$ é unha función continua a cachos en $[0, \infty)$ e de orde exponencial α cando $t \rightarrow \infty$, entón existe $\mathcal{L}[f(t)]$, para calquera $p > \alpha$.

Proba.

Poñamos:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = \int_0^T e^{-pt} f(t) dt + \int_T^\infty e^{-pt} f(t) dt,$$

e vexamos que cada unha das integrais é converxente.

A primeira delas existe porque o integrando é unha función continua a cachos en $0 \leq t \leq T$.

Bastará ver que a integral impropia $\int_T^\infty e^{-pt} f(t) dt$ é converxente.

Como $f(t)$ é de orde exponencial α , existen constantes positivas T e M tales que $|f(t)| < Me^{\alpha t}$ para calquera $t \geq T$.

Así pois:

$$\begin{aligned} \left| \int_T^\infty e^{-pt} f(t) dt \right| &\leq \int_T^\infty |e^{-pt} f(t)| dt = \int_T^\infty e^{-pt} |f(t)| dt \\ &\leq \int_T^\infty M e^{-(p-\alpha)t} dt = -\frac{M}{p-\alpha} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[e^{-(p-\alpha)t} \right]_T^x \\ &= -\frac{M}{p-\alpha} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[e^{-(p-\alpha)x} - e^{-(p-\alpha)T} \right] \\ &= \frac{M}{p-\alpha} e^{-(p-\alpha)T}. \end{aligned}$$

Se $p > \alpha$ será $p - \alpha > 0$, e se $T \rightarrow \infty$ entón $\frac{M}{p-\alpha} e^{-(p-\alpha)T} \rightarrow 0$, é dicir, a integral $\int_T^\infty e^{-pt} f(t) dt$ converxe absolutamente, o que implica a ordinaria, e consecuentemente a existencia de transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^T e^{-pt} f(t) dt + \int_T^\infty e^{-pt} f(t) dt.$$

□

Observación: En xeral o recíproco deste teorema non se da, é dicir, hai funcións para as cales existe a transformada de Laplace pero non son continuas a cachos. Tal ocorre ca función $f(t) = t^{-1/2}$ que presenta en $t = 0$ unha descontinuidade infinita:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-1/2} = \infty,$$

pero é integrable en $[0, T]$, xa que

$$\int_0^T t^{-1/2} dt = 2 \left(t^{1/2} \right)_0^T = 2\sqrt{T},$$

e de orde exponencial, pois:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} t^{-1/2} = 0, \quad \text{para } \alpha > 0,$$

e sen embargo existe a súa transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^{-1/2}] &= \int_0^\infty e^{-pt} t^{-1/2} dt = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{p} \right)^{-1/2} \frac{1}{p} du \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{p^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{p}}. \end{aligned}$$

Co fin de familiarizarnos cos cálculos que involucra a transformada de Laplace, imos probar algunha das súas propiedades máis xerais, as cales serán de utilidade á hora de resolver ecuacións diferencias.

Propiedades:

L1): Sexan $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, e supoñamos que $f(t)$ e $g(t)$ son funcións que admiten transformada de Laplace, entón $\mathcal{L}[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda \mathcal{L}[f(t)] + \mu \mathcal{L}[g(t)]$, é dicir, o operador $\mathcal{L}$ é lineal.

En efecto:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\lambda f(t) + \mu g(t)] &= \int_0^\infty e^{-pt} (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt + \mu \int_0^\infty e^{-pt} g(t) dt \\ &= \lambda \mathcal{L}[f(t)] + \mu \mathcal{L}[g(t)]\end{aligned}$$

L2): (Propiedade de traslación I): Se f é unha función que admite transformada de Laplace $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$, entón:

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(p - a).$$

É inmediato sen máis que aplicar a definición 1.3:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{at} f(t)] &= \int_0^\infty e^{-pt} e^{at} f(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(p-a)t} f(t) dt \\ &= F(p - a)\end{aligned}$$

L3): (Propiedade de traslación II): Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ e $g(t) = \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0, & t \leq a \end{cases}$, entón:

$$\mathcal{L}[g(t)] = e^{-ap} F(p).$$

Pois ben,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g(t)] &= \int_0^\infty e^{-pt} g(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x e^{-pt} f(t-a) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{x-a} e^{-p(u+a)} f(u) du, \quad (t = u+a) \\ &= e^{-ap} \int_0^\infty e^{-pu} f(u) du \\ &= e^{-ap} F(p).\end{aligned}$$

L4): (Cambio de escala) Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(p) \Rightarrow \mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$, $a > 0$.

En efecto,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(at)] &= \int_0^\infty e^{-pt} f(at) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-pt} f(at) dt \\ &= \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{ax} e^{-p \frac{u}{a}} f(u) du, \quad (u = at) \\ &= \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-\frac{p}{a} u} f(u) du \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).\end{aligned}$$

L5): Se $f(t)$ é continua para $t \geq 0$ e de orde exponencial cando $t \rightarrow \infty$, e se $f'(t)$ admite transformada, entón:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = pF(p) - f(0).$$

Resulta que

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-pt} f'(t) dt,$$

que facendo partes con $u = e^{-pt}$ e $dv = f'(t)dt$, obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-pt} f'(t) dt &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left([e^{-pt} f(t)]_0^x + p \int_0^x e^{-pt} f(t) dt \right) \\ &= pF(p) - f(0). \end{aligned}$$

L6): $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^n \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} p^k f^{(n-k-1)}(0)$.

De xeito recorrente, sempre que $f^{(1)}(t), f^{(2)}(t), \dots, f^{(n)}(t)$ admitan transformadas, obtense:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(2)}(t)] &= p \mathcal{L}[f^{(1)}(t)] - f^{(1)}(0) = p[p \mathcal{L}[f(t)] - f(0)] - f^{(1)}(0) \\ &= p^2 \mathcal{L}[f(t)] - p f(0) - f^{(1)}(0). \\ \mathcal{L}[f^{(3)}(t)] &= p \mathcal{L}[f^{(2)}(t)] - f^{(2)}(0) = p^3 \mathcal{L}[f(t)] - p^2 f(0) - p f^{(1)}(0) - f^{(2)}(0). \\ &\vdots \\ \mathcal{L}[f^{(n)}(t)] &= p^n \mathcal{L}[f(t)] - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f^{(1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \\ &= p^n \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} p^k f^{(n-k-1)}(0). \end{aligned}$$

L7): Supoñamos que $f(t)$ admite transformada de Laplace e que é integrable en $[0, t]$ e sexa

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau,$$

que suporemos tamén transformable. Entón:

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{F(p)}{p}.$$

En efecto,

$$\mathcal{L}[g(t)] = \int_0^\infty e^{-pt} g(t) dt,$$

e facendo partes con $u = g(t)$ e $dv = e^{-pt} dt$, resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g(t)] &= \int_0^\infty e^{-pt} g(t) dt \\ &= \left[-g(t) \frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \\ &= \frac{F(p)}{p}, \end{aligned}$$

pois $g(0) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) e^{-pt} = 0$, xa que por hipóteses $g(t)$ é transformable.

L8): $\mathcal{L}[t^{n-1}] = \frac{\Gamma(n)}{p^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Xa que

$$\mathcal{L}[t^{n-1}] = \int_0^\infty e^{-pt} t^{n-1} dt,$$

facendo partes con $u = t^{n-1}$ e $dv = e^{-pt} dt$, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-pt} t^{n-1} dt &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left[-t^{n-1} \frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^x + \frac{n-1}{p} \int_0^x e^{-pt} t^{n-2} dt \right) \\ &= \frac{n-1}{p} \int_0^\infty e^{-pt} t^{n-2} dt, \quad \left(\text{pois } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0 \right) \\ &= \frac{n-1}{p} \mathcal{L}[t^{n-2}], \end{aligned}$$

é dicir

$$\mathcal{L}[t^{n-1}] = \frac{n-1}{p} \mathcal{L}[t^{n-2}].$$

Indutivamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^{n-1}] &= \frac{n-1}{p} \mathcal{L}[t^{n-2}] = \frac{n-1}{p} \cdot \frac{n-2}{p} \mathcal{L}[t^{n-3}] \\ &= \frac{n-1}{p} \cdot \frac{n-2}{p} \cdot \frac{n-3}{p} \mathcal{L}[t^{n-4}] = \frac{n-1}{p} \cdot \frac{n-2}{p} \cdot \frac{n-3}{p} \cdots \frac{1}{p} \mathcal{L}[1] \\ &= \frac{(n-1)!}{p^n} = \frac{\Gamma(n)}{p^n}. \end{aligned}$$

O familiarizarse cos cálculos da transformada de Laplace, permite obter algunhas das transformadas máis comúns, que presentamos na seguinte táboa:

función f	Transformada $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$
$f(t) = 1$	$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt = \frac{1}{p}$
$f(t) = t$	$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} t dt = \frac{1}{p^2}$
$f(t) = t^n$	$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} t^n dt = \frac{n!}{p^{n+1}}$
$f(t) = e^{at}$	$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} e^{at} dt = \frac{1}{p-a}$
$f(t) = \text{sen}(at)$	$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \text{sen}(at) dt = \frac{a}{p^2 + a^2}$
$f(t) = \text{cos}(at)$	$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \text{cos}(at) dt = \frac{p}{p^2 + a^2}$
$f(t) = \text{senh}(at)$	$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \text{senh}(at) dt = \frac{a}{p^2 - a^2}$
$f(t) = \text{cosh}(at)$	$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \text{cosh}(at) dt = \frac{p}{p^2 - a^2}$

Recensión matemática: *Pierre-Simon Laplace* (1749-1827). Foi un astrónomo, físico e matemático francés que inventou e desenrolou a transformada de Laplace que aquí amosamos, así como a ecuación de Laplace. Fillo dun granxeiro, comezou os seus estudos na escola local, pero grazas a un escrito seu sobre os principios da mecánica, o cal impresionou a D' Alembert, puido trasladarse á capital onde obtivo unha praza na École Militaire (escola militar de París), na que entre os seus discípulos estivo Napoleón Bonaparte.

No ámbito científico ostentou importantes cargos. En 1785 é nomeado membro da Academia das Ciencias, e en 1795, membro da cátedra de matemáticas do Novo Instituto das Ciencias e as Artes, que presidirá ata 1812.

En 1799 tamén foi nomeado ministro do Interior durante o consulado, aínda que o cargo só lle durou seis semanas. O seu antigo alumno Napoleón conferiulle en 1805 a Lexión de honra e en 1806 o título de conde do Imperio. En 1816 foi elixido membro da Academia Francesa. A pesar do seu pasado bonapartista, trala restauración dos Borbóns, foi o suficientemente vivo como para conseguir ser nomeado márkés en 1817.

A maior parte do seu traballo sobre astronomía foi desenrolado entre 1771 e 1789. Tal estudo estaba baseado nas desigualdades planetaria, seguido por algúns escritos sobre cálculo integral e ecuacións diferenciais en derivadas parciais. Entre a súa produción destaca o período entre 1784-1787, no que se centro na determinación da atracción dun esferoide sobre unha partícula situado no seu exterior, para cuxa determinación introduciu o análise de armónicos ou coeficientes de Laplace e o concepto de potencial.

En 1796 publicou a súa exposición do sistema do mundo, no que ofrece unha versión divulgativa da mecánica newtoniana e unha exposición do sistema solar. Os seus resultados analíticos sobre a mecánica estelar publicáronse nos cinco

volumes do Tratado de mecánica celeste (1799-1825). É a súa obra máis importante.

Foi considerado por moitos o Newton francés.

1.4. Convención.

Un dos resultados máis importantes na teoría da transformada de Laplace é o teorema de Lerch, (ver [7], páx. 35). Se prescindimos das funcións nulas, que non teñen interpretación física algunha, este teorema asegura a unicidade da transformada inversa:

Teorema 1.7 (Lerch).

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)] \Leftrightarrow f(t) = g(t) \quad \text{para } t > 0,$$

ca posible excepción dos puntos de descontinuidade.

Non nos centraremos na súa proba, aínda que pode ser consultala na cita indicada.

Como digo, o carácter inxectivo, permite falar de operador inverso, ou transformada inversa de Laplace, escrito $\mathcal{L}^{-1}$.

Dun modo, a transformada de Laplace transforma unha función $f(t)$ noutra función $F(p)$, e doutro, o operador inverso transforma a función $F(p)$ na función orixinal $f(t)$.

Noutras palabras:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p)] = f(t) \Leftrightarrow \mathcal{L}[f(t)] = F(p).$$

Enunciamos algunha das súas propiedades máis salientables e motivámolas a través dalgún exemplo:

Propiedades:

IL-1): É lineal, é dicir, para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, será:

$$\mathcal{L}^{-1}[\lambda F(p) + \mu G(p)] = \lambda \mathcal{L}^{-1}[F(p)] + \mu \mathcal{L}^{-1}[G(p)].$$

IL-2): Propiedade de traslación da variable p :

$$\text{Se } \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = f(t) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(p-a)] = e^{at} f(t).$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2 - 2p + 5}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p-1)^2 + 4}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2\left(\frac{(p-1)^2}{2} + 2\right)}\right] \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(p-1)^2 + 4}\right] \\ &= \frac{1}{2} e^t \text{sen}(2t), \end{aligned}$$

pois

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{p^2 + 4}\right] = \text{sen}(2t).$$

IL-3): Propiedade de traslación da variable t :

$$\text{Se } \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = f(t) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[e^{-ap} F(p)] = \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0, & t \leq a \end{cases}.$$

Exemplo:

Como:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2 + 1}\right] = \text{sen}(t),$$

será

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\frac{\pi p}{3}}}{p^2 + 1}\right] = \begin{cases} \text{sen}\left(t - \frac{\pi}{3}\right) & \text{se } t > \frac{\pi}{3} \\ 0 & \text{se } t < \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

IL-4): Cambio de escala:

$$\text{Se } \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = f(t) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(ap)] = \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right), \quad a \neq 0.$$

Exemplo:

Posto que:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{p}{p^2 + 16} \right] = \cos(4t),$$

será:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2p}{4p^2 + 16} \right] = \frac{1}{2} \cos(2t).$$

Estas propiedades, e outras, poden consultarse en [7], o que se pretende recalcar e a súa utilidade.

A continuación introducimos o concepto de **convolución** entre dúas funcións:

Supoñamos que f e g son funcións para as cales F e G representan, respectivamente, as súas transformadas de Laplace. Esperta a nosa curiosidade saber que é $\mathcal{L}^{-1}[F \cdot G]$.

Co fin de responder á pregunta, escribamos:

$$\begin{aligned} F(p) \cdot G(p) &= \left(\int_0^\infty e^{-ps} f(s) ds \right) \cdot \left(\int_0^\infty e^{-pt} g(t) dt \right) \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-p(s+t)} f(s) ds \right) g(t) dt, \end{aligned}$$

onde os límites de integración limítannos ao primeiro cuadrante, $s \geq 0, t \geq 0$.

Introducindo unha nova variable $x = s + t$, é dicir, $s = x - t$, (deixando t fixa), logo $ds = dx$, obtemos:

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-p(s+t)} f(s) ds \right) g(t) dt = \int_0^\infty \int_t^\infty e^{-px} f(x-t) g(t) dx dt,$$

que tendo presente que $t \leq x \leq \infty$ e $0 \leq t \leq \infty$, intercambiando a orde de integración, resulta:

$$\begin{aligned} F(p) \cdot G(p) &= \int_0^\infty \int_t^\infty e^{-px} f(x-t) g(t) dx dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^x e^{-px} f(x-t) g(t) dt dx \\ &= \int_0^\infty e^{-px} \left(\int_0^x f(x-t) g(t) dt \right) dx \\ &= \mathcal{L} \left(\int_0^x f(x-t) g(t) dt \right). \end{aligned}$$

A integral desta última expresión con límite superior x proporciona a resposta á pregunta plantada:

$$\mathcal{L}^{-1}[F \cdot G] = \mathcal{L}^{-1} \left[\mathcal{L} \left(\int_0^x f(x-t) g(t) dt \right) \right] = f * g(x),$$

onde

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-t) g(t) dt,$$

coñécese como a **convolución** das funcións f e g .

O cálculo realizado,

$$F(p) \cdot G(p) = \mathcal{L} [f * g(x)],$$

dinos que o produto das transformadas de Laplace de dúas funcións é a transformada da súa convolución.

Na literatura matemática isto coñécese como **teorema de convolución**.

Dito teorema permite pois calcular transformadas inversas. Por exemplo, como $\mathcal{L}[x] = \frac{1}{p^2}$ e $\mathcal{L}[\sin(x)] = \frac{1}{p^2+1}$, será:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p^2(p^2+1)} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p^2} \left(\frac{1}{p^2+1} \right) \right] \\ &= \int_0^x (x-t) \sin(t) dt \\ &= x \int_0^x \sin(t) dt - \int_0^x t \sin(t) dt \\ &= x(-\cos(t)) \Big|_0^x - \left[-(t \cos(t)) \Big|_0^x + \int_0^x \cos(t) dt \right] \\ &= x - \sin(x), \end{aligned}$$

onde aplicamos integración por partes.

Observación: En xeral, dadas f e g , defínese o produto de convolución como a integral:

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt,$$

onde o intervalo de integración dependerá do dominio sobre o que estean definidas as funcións.

A continuación nomeamos algunhas propiedades do produto de convolución:

Propiedades:

PC-1): É conmutativa, é dicir, $f * g(x) = g * f(x)$.

En efecto:

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt, \quad (u = x-t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u)g(x-u)du \\ &= g * f(x). \end{aligned}$$

PC-2): É asociativa, é dicir, $(f * g) * h(x) = f * (g * h)(x)$.

$$(f * g) * h(x) = \mathcal{L}^{-1}[(F \cdot G) \cdot H] = \mathcal{L}^{-1}[F \cdot (G \cdot H)] = f * (g * h)(x).$$

PC-3): É bilinear, é dicir, para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, será:

$$(\lambda f + \mu g) * h(x) = \lambda(f * h(x)) + \mu(g * h(x)),$$

e

$$f * (\lambda f + \mu h)(x) = \lambda(f * g(x)) + \mu(f * h(x)).$$

Por exemplo:

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g) * h(x) &= \int_{\mathbb{R}} (\lambda f + \mu g)(x-t)h(t)dt \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}} f(x-t)h(t)dt + \mu \int_{\mathbb{R}} g(x-t)h(t)dt \\ &= \lambda(f * h(x)) + \mu(g * h(x)). \end{aligned}$$

Deste modo, o operador convolución transforma dúas funcións f e g nunha terceira función $h(x) = f * g(x)$ que pode ser interpretado como o “produto xeneralizado” de ditas funcións.

Observación: Existen propiedades da multiplicación ordinaria que a convolución non ten. Por exemplo, $f * 1 \neq f$. Basta tomar $f(t) = \cos t$ para ver que:

$$f * 1(x) = \cos x * 1 = \int_0^x \cos t dt = \sin x.$$

1.5. Aplicacións.

Ó estar falando de transformada de Laplace, resulta inevitable destacar a súa utilidade á hora de resolver ecuacións diferencias. As propiedades descritas na sección 1.3 cobrarán agora especial protagonismo.

Recordemos que unha ecuación diferencial é unha expresión da forma:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f(t),$$

onde $a_1, a_2, \dots, a_n$ son constantes e supoñemos que $f(t)$ admite transformada de Laplace.

Aplicando a transformada de Laplace a ambos membros da anterior ecuación, resulta:

$$\mathcal{L}[y^{(n)}] + a_1 \mathcal{L}[y^{(n-1)}] + a_2 \mathcal{L}[y^{(n-2)}] + \dots + a_n \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[f(t)].$$

Chamando

$$\mathcal{L}[y] = Y(p), \quad \mathcal{L}[f(t)] = F(p),$$

as propiedades da transformada de Laplace relativas á derivada n -ésima permiten transformar a ecuación anterior en:

$$\begin{aligned} & \left[p^n Y(p) - p^{n-1} y(0) - p^{n-2} y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0) \right] + a_1 \left[p^{n-1} Y(p) - p^{n-2} y(0) - \dots - y^{(n-2)}(0) \right] + \\ & + a_2 \left[p^{n-2} Y(p) - p^{n-3} y(0) - \dots - y^{(n-3)}(0) \right] + \dots + a_n Y(p) = F(p), \end{aligned}$$

que reordenando os membros obtemos

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n) Y(p) = F(p) + b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \dots + b_n,$$

onde os coeficientes $b_1, b_2, \dots, b_n$ do polinomio $P(p) = b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \dots + b_n$ dependen das condicións iniciais $y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$.

Sen máis que despxear $Y(p)$ obtemos:

$$Y(p) = \frac{F(p) + P(p)}{H(p)},$$

onde $H(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n$ é o polinomio característico, e da natureza das súas raíces dependerá a solución $y(t)$ da ecuación diferencial, que é:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{F(p) + P(p)}{H(p)} \right].$$

Observación: Se as condicións iniciais son coñecidas, obtense directamente a solución particular do problema, noutro caso, esta dependerá de n constantes $c_1 = y(0), c_2 = y'(0), \dots, c_n = y^{(n-1)}(0)$, é dicir será a solución xeral da ecuación diferencial.

Obviamente supoñemos que tanto $y(t)$ como as sucesivas derivadas admiten transformada de Laplace, o que vemos que foi correcto, pois sabemos da teoría de ecuacións diferenciais lineais con coeficientes constantes, que estas teñen solución única e obtivemos unha con este suposto.

Os pasos descritos para obter a solución dunha ecuación diferencial, facendo uso da transformada de Laplace, podémolos resumir do seguinte modo:

- 1) Aplicamos o operador de Laplace a ambos lados da ecuación diferencial.
- 2) Aplicamos as propiedades coñecidas de forma que só nos queda unha incógnita: $\mathcal{L}[y]$.
- 3) Despexamos $\mathcal{L}[y]$.
- 4) Aplicamos $\mathcal{L}^{-1}$ para obter $y(t)$, solución da ecuación diferencial.

Exemplo 1: Apliquemos isto para obter a solución do seguinte problema:

$$\begin{cases} y' + 4y + 5 \int_0^x y(t) dt = e^{-x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Pois ben, tendo en conta que $\mathcal{L}$ é lineal, aplicando este operador a ambos lados da ecuación diferencial, resulta:

$$\mathcal{L}[y'] + 4\mathcal{L}[y] + 5\mathcal{L} \left[\int_0^x y(t) dt \right] = \mathcal{L}[e^{-x}].$$

O único que esta por determinar da ecuación anterior é o membro dereito da igualdade, que calculamos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-x}] &= \int_0^\infty e^{-px} e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-(1+p)x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{1+p} e^{-(1+p)x} \Big|_0^t \right) \\ &= \frac{1}{1+p}. \end{aligned}$$

Así, disto último, da condición inicial, e da aplicación das propiedades coñecidas da transformada de Laplace, esta transforma, nunca mellor dito, a ecuación

$$\mathcal{L}[y'] + 4\mathcal{L}[y] + 5\mathcal{L} \left[\int_0^x y(t) dt \right] = \mathcal{L}[e^{-x}]$$

en

$$p\mathcal{L}[y] + 4\mathcal{L}[y] + 5\frac{\mathcal{L}[y]}{p} = \frac{1}{1+p},$$

equivalentemente

$$(p^2 + 4p + 5)\mathcal{L}[y] = \frac{p}{1+p} \Rightarrow \mathcal{L}[y] = \frac{p}{1+p} \cdot \frac{1}{p^2 + 4p + 5}.$$

Agora, para poder obter a transformada de Laplace inversa, sería de utilidade expresar a anterior expresión como transformadas de Laplace coñecidas, ou se o prefire, sinxelas de calcular. Para ilo usamos as fraccións simples como segue:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{p}{(1+p)(p^2 + 4p + 5)} = \frac{Ap + B}{p^2 + 4p + 5} + \frac{C}{1+p},$$

é dicir

$$p = (Ap + B)(1+p) + C(p^2 + 4p + 5).$$

Entón, se

$$\begin{aligned} p = -1 &\Rightarrow -1 = 2C \Rightarrow C = -\frac{1}{2} \\ p = 0 &\Rightarrow 0 = B - \frac{5}{2} \Rightarrow B = \frac{5}{2} \\ p = 1 &\Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

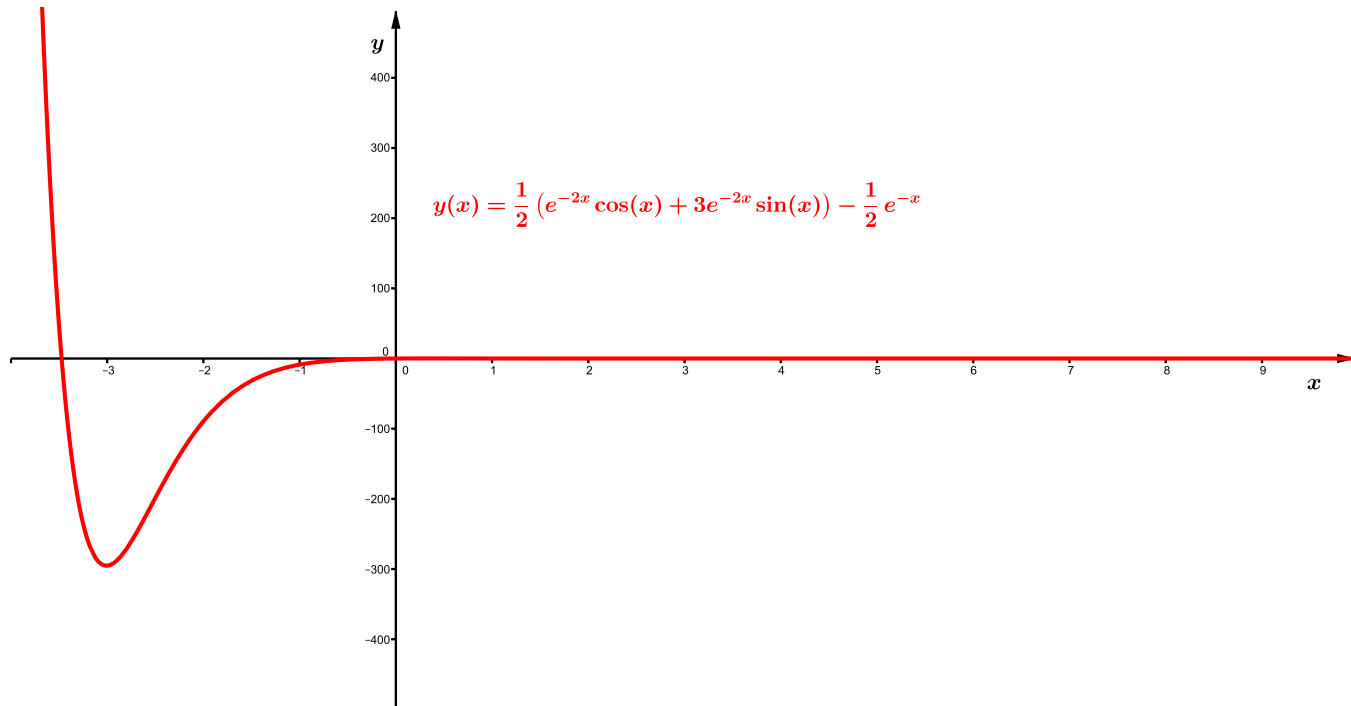
e daquela

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y] &= \frac{(1/2)p + 5/2}{p^2 + 4p + 5} - \frac{1/2}{1+p} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(p+2) + 3}{(p+2)^2 + 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+p} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(p+2)}{(p+2)^2 + 1} + 3 \frac{1}{(p+2)^2 + 1} \right) - \frac{1}{2} \frac{1}{1+p}. \end{aligned}$$

Por último, aplicando a transformada inversa e tendo presente as transformadas coñecidas, obtemos:

$$y(x) = \frac{1}{2} (e^{-2x} \cos x + 3e^{-2x} \operatorname{sen} x) - \frac{1}{2} e^{-x},$$

que é a solución do problema plantado, é dicir, verifica tanto a ecuación diferencial de primeira orde como a súa condición inicial.

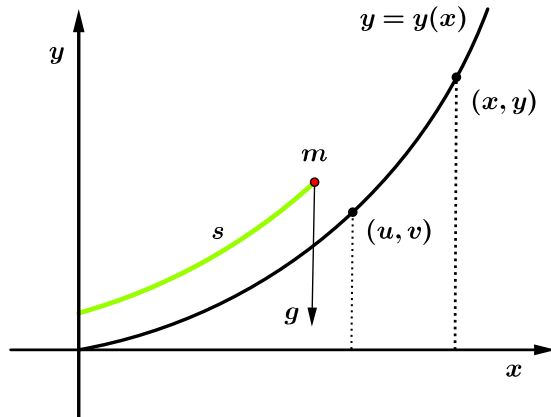


Neste exemplo os coeficientes involucrados na ecuación diferencial son constantes. Sen embargo, isto non ten porque ser así, pois as constantes poden cobrar protagonismo como polinomios, por exemplo. Nesta caso tamén é posible aplicar a transformada de Laplace, chegando a expresións, por exemplo, do tipo $\mathcal{L}[t^2 y]$ ou $\mathcal{L}[ty']$, entre outras. Aínda que a súa expresión, en principio aparenta máis complicada, tamén son coñecidas transformadas de Laplace para o caso. Pode consultarse [4] ou [7].

Exemplo 2: A transformada de Laplace intervén de forma decisiva na solución do problema da mecánica formulado por Abel que a continuación presentamos.

Pensemos nun cable dobrado en forma de curva suave. Tal curva atopa o seu final na orixe de coordenadas. Imaxinemos tamén que unha partícula de masa m que parte do repouso dende o punto (x, y) se desliza polo cable sen estar sometida a fricción algunha ata que chega ó final da curva, a orixe. A única forza que actúa sobre a partícula é a da gravidade, que só depende do peso da mesma.

Graficamente:



A situación descrita plantea os dous seguintes problemas:

Problema 1: Se o cable representa a gráfica dunha función $y = y(x)$ estamos interesados en calcular o tempo total de descenso $T(y)$ da partícula, que dependerá da forma do cable e da altura inicial y_0 , é dicir, coñecida y pretendemos determinar $T(y)$.

Problema 2: Se o tempo total de descenso é coñecido, determinar a forma y do cable.

O problema 2, consistente en invertir o proceso descrito do problema 1, coñecese como o problema mecánico de Abel, en honra ó matemático Niels Henrik Abel.

A continuación describimos un proceso que nos permitirá determinar a solución de ambos problemas.

Coñecida a curva $y(x)$, pretendemos determinar $T(y)$.

Para elo partimos do principio de conservación da enerxía, que di que conforme un obxecto cae, este perde enerxía potencial, $E_p = mgh$, e gaña enerxía cinética, $E_c = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, permanecendo a suma destas dúas constante, é dicir:

$$E_p + E_c = C, \quad C = cte.$$

Como a partícula parte do repouso, a súa velocidade inicial será nula, polo que no punto de partida (x, y) será $E_c = 0$, é dicir:

$$E_p + E_c = mgy + 0 = C.$$

No punto (u, v) temos que:

$$mgv + \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = C.$$

Polo principio de conservación de enerxía, a constante C non cambia, e así podemos igualar ambas expresións para obter:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = mg(y - v).$$

Como a lonxitude de arco $s = s(t)$ mide a distancia que lle queda por percorrer á partícula, esta decrece a medida que t aumenta, $\frac{ds}{dt} < 0$, polo que podemos escribir esta última ecuación, desdexando o cociente e tendo só en conta o

signo negativo, como

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(y-v)}$$

é dicir

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(y-v)}},$$

onde o signo “−” nos indica que a partícula se move cara a orixe.

O tempo de descenso, que depende da altura inicial y , cumpre:

$$\begin{aligned} T(y) &= \int_{v=y}^{v=0} dt = \int_{v=y}^{v=0} -\frac{ds}{\sqrt{2g(y-v)}} \\ &= \int_{v=0}^{v=y} \frac{ds}{\sqrt{2g(y-v)}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^y \frac{s'(v)dv}{\sqrt{y-v}}, \end{aligned} \quad (1)$$

pois $s'(v) = \frac{ds}{dv}$.

Posto que $y = y(x)$ neste caso é coñecida, a lonxitude de arco s da curva delimitada por 0 e y ven dada pola ecuación:

$$s = s(y) = \int_0^y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy'}\right)^2} dy',$$

e do teorema fundamental do cálculo

$$f(y) = s'(y) = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}, \quad (2)$$

que substituíndo esta última expresión en (1) resulta:

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^y \frac{f(v)dv}{\sqrt{y-v}}. \quad (3)$$

Esta expresión (3) coñécese co nome de ecuación integral de Abel e permite determinar o tempo total de descenso $T(y)$ dada a curva $y = y(x)$.

A perspectiva do problema mecánico de Abel consiste agora en determinar $y = y(x)$ dada $T(y)$, e aquí é onde intervén a transformada de Laplace.

Notemos que o lado dereito da ecuación (3) representa a convolución das funcións $f(y)$ e $g(y) = y^{-\frac{1}{2}}$, e polo tanto dada $T(y)$ será:

$$\mathcal{L}[T(y)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \mathcal{L}[g(y)] \cdot \mathcal{L}[f(y)],$$

de onde

$$\mathcal{L}[f(y)] = \sqrt{2g} \cdot \frac{\mathcal{L}[T(y)]}{\sqrt{\pi/p}} = \sqrt{\frac{2g}{\pi}} p^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathcal{L}[T(y)]. \quad (4)$$

Como $T(y)$ é coñecida, o lado dereito da anterior ecuación está completamente determinado, e así seremos capaces de calcular $\mathcal{L}[f(y)]$, e, en consecuencia, resolver a ecuación diferencial (2).

Imos considerar o caso en que $T(y)$ é igual a unha constante T_0 . Entón, a ecuación (4) redúcese a:

$$\mathcal{L}[f(y)] = \sqrt{\frac{2g}{\pi}} p^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathcal{L}[T_0] = \sqrt{\frac{2g}{\pi}} p^{-\frac{1}{2}} \frac{T_0}{p} = b^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{p}}, \quad (5)$$

onde $b = \frac{2gT_0^2}{p}$.

Como $\mathcal{L}[y^{-1/2}] = \sqrt{\frac{\pi}{p}}$, visto no exemplo do teorema 1.6, será:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\sqrt{\frac{\pi}{p}} \right] = y^{-\frac{1}{2}},$$

e aplicando o método da transformada de Laplace, (5) realmente é:

$$f(y) = \sqrt{\frac{b}{y}},$$

Agora, a expresión (2) permítemos escribir:

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{b}{y},$$

e da aplicación do método de separación de variables, resulta:

$$x = \int \sqrt{\frac{b-y}{y}} dy.$$

Introducindo o cambio de variable $y = b \sin^2 \theta \Rightarrow dy = 2b \sin \theta \cos \theta d\theta$, a anterior convértese en:

$$\begin{aligned} x &= \int \sqrt{\frac{b-y}{y}} dy = \int \sqrt{\frac{b(1-\sin^2 \theta)}{b \sin^2 \theta}} 2b \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 2b \int \cos^2 \theta d\theta = b \int (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{b}{2} (2\theta + \sin 2\theta) + C, \end{aligned}$$

onde aplicamos as relacións trigonométricas fundamentais seguintes:

$$\begin{cases} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \\ \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta \end{cases}$$

Así pois:

$$\begin{cases} x = \frac{b}{2} (2\theta + \sin 2\theta) + C \\ y = \frac{b}{2} (1 - \cos 2\theta) \end{cases} \quad (6)$$

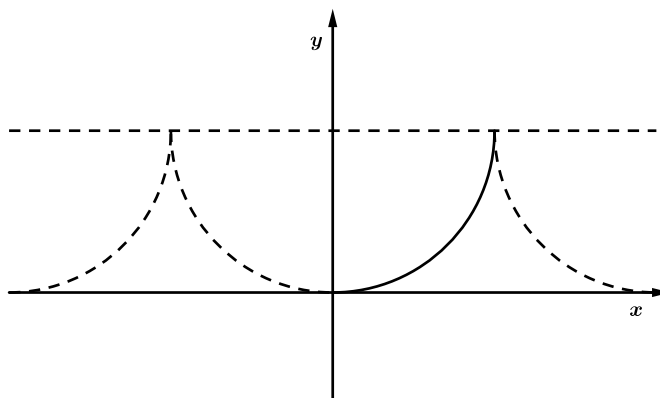
e impoñendo na condición inicial a existencia de que a partícula pase pola orixe, dedúcese que $C = 0$.

Definindo $a = \frac{b}{2}$ e $\phi = 2\theta$, (6) adquire a forma simple seguinte:

$$\begin{cases} x = a(\phi + \sin \phi) \\ y = a(1 - \cos \phi) \end{cases}$$

que son as ecuacións paramétricas dun cicloide, é dicir, a forma do cable que segue a partícula ao desprazarse sobre el cando $T(y) = T_0$, que se xera por medio dun punto fixo nun círculo de radio $r = a$, o cal roda baixo a liña horizontal de puntos $y = 2a$. Posto que $2a = b = \frac{2gT_0^2}{\pi^2}$, o diámetro do círculo xerador estará determinado polo tempo constante de descenso.

Graficamente:



Para a descrición da sección de convolución, así como o problema mecánico de Abel empregouse o libro [4] da bibliografía.

Recensión matemática: *Niels Henrik Abel (1802-1829). Foi un matemático noruegués. Fillo dun pastor protestante, a súa infancia viuse afectada pola tensión do alcoholismo que padeceu seu pai. Trala morte do mesmo, cando Abel tiña dezoito anos, as súas precoces aptitudes para as matemáticas foron rapidamente advertidas por un dos seus profesores, Holmboe, quen financiou os seus primeiros anos na universidade. A publicación dos seus primeiros traballos conferiulle importante prestixio no ámbito matemático, aínda que nin el nin o seu traballo foron especialmente coñecidos, debido a que a súa modestia non lle levou a facer públicos moitos dos seus resultados.*

Afectado de tuberculose, foi isto o que puxo un punto e seguido na súa investigación, pois levoulle á morte a idade de vintese anos, e sen embargo as súas achegas ás matemáticas abriron futuros campos de investigación que moitos matemáticos recolleron como testemuña dun matemático tan prometedor.

O século XIX foi, en moitos aspectos, un dos períodos máis ricos da historia das matemáticas. Unha serie de xenios desenrolaron novas ramas, completando teorías anteriores e abriron novos camiños poñendo en dúbida axiomas que ata entón eran sagrados. Un destes xenios foi o precoz Niels Henrik Abel. Nacido nun humilde fogar do sur de Noruega, cando tiña 18 anos trala morte de seu pai tivo que responsabilizarse da súa familia. Dende moi mozo lía traballos de Isaac Newton e Leonhard Euler, e descubriu varios fallos nas súas demostracións. O seu interese polas matemáticas adquiriu solidez da man de B. M. Holmboe, un dos seus profesores, quen máis tarde publicaría as obras completas de Abel.

Nesta época dourada das matemáticas non foron poucos os matemáticos que intentaron sen éxito resolver a ecuación de quinto grao do tipo: $Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = 0$. Abel pensou que o conseguira, pero pronto atopou un erro na solución.

No seu lugar demostrou que é imposible resolver unha ecuación de quinto grao ou superior pola vía alxébrica, é dicir, cunha serie finita de sumas, restas, multiplicacións, divisións e raíces. Tal proba fíxoa Abel con tan só 19 anos de idade, que por entón estaba rematando os seus estudos universitarios en Oslo. O posterior desenvolvemento da álgebra, en gran medida, está baseada en tal logro conseguido por Abel.

A proposta de Holmboe, C. Hansteen e outros profesores, Abel recibiu por decreto real unha beca de viaxe. Entre 1825 y 1827 coñeceu aos máis importantes matemáticos de Alemaña e Francia. Foi por aquel entón cando escribiu a maior parte dos seus traballos, que foron publicados na revista alemá Crelles Journal. Entre os matemáticos de seu tempo, o profesor Degen de Copenhague e o conselleiro de Berlín foron os que comprenderon de inmediato a grandeza matemática de Abel. Crelle encargouse de que Abel tivera unha praza de profesor en Berlín, pero a tuberculose pulmonar acabou ca

súa vida antes de poder exercer dito cargo.

Falece este xenial matemático en 1829 á idade de 27 anos.

Tendo en conta a súa corta vida, a mente de Niels Henrik Abel foi sumamente prolífica, e son numerosas as súas achegas ás matemáticas. Como dixemos demostrou que as ecuacións alxébricas xerais non poden ser resoltas alxebricamente cando son de grao superior a catro; estudou as funcións alxébricas, as elípticas, as transcendentales de orde superior e as integrais definidas; estableceu a dobre periodicidade das funcións elípticas e descubriu o seu teorema adición; finalmente, descubriu unha nova clase de ecuacións, as chamadas ecuación abelianas, en honra o seu nome.

Na súa necrolóxica, aparecida nunha revista, Crelle escribiu: “Atacaba as súas metas cunha enerxía tan potente e dende un punto tan alto, e se erixiu ata tal punto sobre o nivel da súa época, que as dificultades desaparecían ante a súa enerxía vitoriosa”.

No ano 2002, no bicentenario do nacemento do matemático Niels Henrik Abel o goberno de Noruega creou o Premio Abel. Cada ano a Academia de Ciencias de Noruega, formada por un comité de cinco matemáticos de distintos países, outorga este premio para recoñecer unha labor matemática de especial índole. Dotada dunha recompensa económica similar á do premio Nobel, pretende dar recoñecemento e prestixio á labor matemática.

Capítulo 2

Integral e derivada fraccionaria.

2.1. Integral fraccionaria de Riemann-Liouville.

Sexa $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función continua. A primitiva de f é a función

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x f(t)dt$$

que denotaremos por $If(x)$. Pódese integrar novamente considerando a función $I(I f(x)) = I^2 f(x)$.

En xeral a primitiva n -ésima de f será $I^n f(x) = I(I^{n-1} f(x))$.

Probaremos que $I^n f$ pódese expresar como unha integral da función f dando lugar á fórmula integral de Cauchy para as integrais repetidas.

Consideremos pois unha función $f : [0, T] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable no senso de Lebesgue.

Para $x \in [0, T]$, integrando dúas veces temos que

$$\int_0^x \int_0^{x_1} f(t)dt dx_1.$$

Afirmamos que

$$\int_0^x \int_0^{x_1} f(t)dt dx_1 = \int_0^x (x-t)f(t)dt.$$

En efecto, facendo integración por partes con $u = (x-t)$ e $dv = f(t)dt$, logo $du = -dt$ e $v = \int_0^t f(t')dt'$, resulta:

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-t)f(t)dt &= \left[(x-t) \int_0^t f(t')dt' \right]_0^x + \int_0^x \int_0^t f(t')dt'dt \\ &= \int_0^x \int_0^{x_1} f(t)dt dx_1. \end{aligned}$$

A expresión:

$$\int_0^x \int_0^{x_{n-1}} \dots \int_0^{x_1} f(t)dt dx_1 \dots dx_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt,$$

coñécese como a **fórmula integral de Cauchy das integrais repetidas**, e é a que marcará a orixe da integral fraccionaria.

Para a súa xustificación empregaremos un razoamento de integración por partes similar ó anteriormente descrito. Por comodidade, para referirnos ás k -primitivas, empregaremos a seguinte notación:

$$f^{[k]}(x) = \int_0^x f^{[k-1]}(t)dt, \quad f^{[0]}(x) = f(x),$$

Pois ben, facendo partes con $u = (x-t)^{n-1}$ e $dv = f(t)dt$, logo $du = -(n-1)(x-t)^{n-2}dt$ e $v = f^{[1]}(t)$, resulta:

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt &= \left[(x-t)^{n-1} f^{[1]}(t) \right]_0^x + (n-1) \int_0^x (x-t)^{n-2} f^{[1]}(t)dt \\ &= (n-1) \int_0^x (x-t)^{n-2} f^{[1]}(t)dt. \end{aligned}$$

Tomando agora $u = (x - t)^{n-2}$ e $dv = f^{[1]}(t)dt$, logo $du = -(n-2)(x-t)^{n-3}dt$ e $v = f^{[2]}(t)$, integrando novamente por partes, obtemos:

$$(n-1) \int_0^x (x-t)^{n-2} f^{[1]}(t)dt = (n-1) \cdot (n-2) \int_0^x (x-t)^{n-3} f^{[2]}(t)dt.$$

Repetindo k – veces este razoamento de integración por partes, atoparíamos:

$$\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt = (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k) \int_0^x (x-t)^{n-1-k} f^{[k]}(t)dt,$$

que no paso $k = n-1$, o termo $(x-t)$ "aniquíllase", dando lugar a:

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt &= (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \int_0^x f^{[n-1]}(t)dt \\ &= (n-1)! f^{[n]}(t), \end{aligned}$$

equivalentemente

$$\int_0^x \int_0^{x_{n-1}} \cdots \int_0^{x_1} f(t) dt dx_1 \cdots dx_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt,$$

xa que

$$f^{[n]}(t) = \int_0^x f^{[n-1]}(t)dt = \int_0^x \int_0^{x_{n-1}} \cdots \int_0^{x_1} f(t) dt dx_1 \cdots dx_{n-1}.$$

A función factorial, $\Gamma(n) = (n-1)!$, foi xeneralizada por Euler a calquera $\alpha > 0$. Isto permite estender a expresión do lado dereito da fórmula integral de Cauchy a calquera índice $\alpha > 0$, onde a función gamma de Euler non se anula, dando cabida á seguinte definición:

Definición 2.1. Para un número real $\alpha > 0$ e unha función $f \in L_1(0, 1)$, a expresión

$$[I^\alpha f](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x \in (0, 1)$$

denomínase **integral fraccionaria de Riemann-Liouville** de orde α .

Esta é unha boa definición no senso que o integrando representa unha función integrable.

En efecto, se $\alpha > 1$ entón $(x-t)^{\alpha-1} \in L_1(0, 1)$ e como $f \in L_1(0, 1)$, o seu produto tamén está en $L_1(0, 1)$. Logo neste caso non hai nada que ver.

Quizais o caso de especial interese é cando $0 < \alpha < 1$, por presentar no denominador unha singularidade. Neste caso a integral fraccionaria tamén é coñecida como a ecuación integral de Abel, e sen entrar en excesivas cuestións técnicas, está ben definida en $L_1(0, 1)$ se, e só se:

$$[I^{1-\alpha} f](x) \in L_1(0, 1), \quad [I^{1-\alpha} f](0) = 0.$$

(Ver [2] da bibliografía, capítulo 2, por exemplo).

Chamemos $f_{1-\alpha}(x) = [I^{1-\alpha} f](x)$.

É claro que $f_{1-\alpha}(0) = 0$.

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 f_{1-\alpha}(x) dx \right| &\leq \int_0^1 |f_{1-\alpha}(x)| dx \\
&= \int_0^1 \left| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \right| dx \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \int_0^x \left| \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} \right| dt dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 |f(t)| \int_t^1 \left| \frac{1}{(x-t)^\alpha} \right| dx dt, \quad (\text{Fubini}) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 |f(t)| \int_t^1 (x-t)^{-\alpha} dx dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 |f(t)| \left(\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \Big|_t^1 dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)} \int_0^1 |f(t)|(1-t)^{1-\alpha} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^1 |f(t)|(1-t)^{1-\alpha} dt, \quad (\text{Ecuación funcional Gamma, } \mathbf{G1}).
\end{aligned}$$

Como $0 < \alpha < 1$, claramente $(1-t)^{1-\alpha} \in L_1(0,1)$, e da hipóteses $f \in L_1(0,1)$ conclúese que $|f(t)|(1-t)^{1-\alpha} \in L_1(0,1)$. En consecuencia $f_{1-\alpha} \in L_1(0,1)$ e a integral fraccionaria de Riemann-Liouville está ben definida.

Algunhas propiedades da definición 2.1 son as seguintes:

Propiedades:

I1): É lineal, é dicir, para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $f, g \in L_1(0,1)$, será:

$$I^\alpha(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda I^\alpha f(x) + \mu I^\alpha g(x).$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
I^\alpha(\lambda f + \mu g)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} (\lambda f + \mu g)(t) dt \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt + \frac{\mu}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} g(t) dt \\
&= \lambda I^\alpha f(x) + \mu I^\alpha g(x).
\end{aligned}$$

I2): Se $[I^\alpha f](x)$ é a integral fraccionaria de Riemann-Liouville, esta tamén pode ser representa do seguinte xeito:

$$[I^\alpha f](x) = (\phi * f)(x),$$

onde $\phi(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$.

É claro, pois pola definición de convolución e ϕ , será:

$$(\phi * f)(x) = \int_0^x \phi(x-t)f(t)dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt.$$

I3): Para $f \in L_1(0,1)$, verifícase:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} [I^\alpha f](x) = f(x),$$

para case todo $x \in [0,1]$.

Da definición 2.1, temos:

$$[I^\alpha f](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt.$$

Aplicando integración por partes con $u = f(t) \Rightarrow du = f'(t)$, e $dv = (x-t)^{\alpha-1} dt \Rightarrow v = -\frac{(x-t)^\alpha}{\alpha}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
[I^\alpha f](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(- \left[\frac{(x-t)^\alpha}{\alpha} f(t) \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^\alpha}{\alpha} f'(t) dt \right) \\
&= \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \left(x^\alpha f(0) + \int_0^x (x-t)^\alpha f'(t) dt \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(x^\alpha f(0) + \int_0^x (x-t)^\alpha f'(t) dt \right), \quad (\text{Ecuación funcional Gamma, } \mathbf{G1})
\end{aligned}$$

que pasando a límites,

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow 0} [I^\alpha f](x) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(x^\alpha f(0) + \int_0^x (x-t)^\alpha f'(t) dt \right) \right\} \\ &= f(0) + \int_0^x f'(t) dt \\ &= f(0) + f(x) - f(0) \\ &= f(x).\end{aligned}$$

I4): (Lei de expoñentes): Para $f \in L_1(0, 1)$, verificase:

$$I^\alpha I^\beta f(x) = I^{\alpha+\beta} f(x), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+,$$

para case todo $x \in [0, 1]$.

Aplicando a definición 2.1, temos:

$$\begin{aligned}I^\alpha I^\beta f(x) &= I^\alpha \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \int_\tau^x (x-t)^{\alpha-1} (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) dt d\tau, \quad (Fubini).\end{aligned}$$

Sen mais que considerar o cambio de variable $t = \tau + s(x-\tau) \Rightarrow dt = (x-\tau)ds$, o integrando da última igualdade convértese en:

$$\begin{aligned}(x-t)^{\alpha-1} (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) dt &= (x-(\tau+s(x-\tau)))^{\alpha-1} (\tau+s(x-\tau)-\tau)^{\beta-1} f(\tau) (x-\tau) ds \\ &= (x-\tau-s(x-\tau))^{\alpha-1} (s(x-\tau))^{\beta-1} f(\tau) (x-\tau) ds \\ &= ((x-\tau)(1-s))^{\alpha-1} s^{\beta-1} (x-\tau)^\beta f(\tau) ds \\ &= (x-\tau)^{\alpha+\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} f(\tau) ds,\end{aligned}$$

e como $\tau \leq t \leq x$, se $t = \tau$ será $s = 0$, e se $t = x$, é $s = 1$, así que:

$$\begin{aligned}I^\alpha I^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \int_0^1 (x-\tau)^{\alpha+\beta-1} s^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} f(\tau) ds d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau) \left(\int_0^1 s^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} ds \right) d\tau.\end{aligned}$$

Agora ben,

$$\beta(x, y) := \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x, y > 0,$$

e como $\alpha, \beta > 0$, da analoxía da definición anterior, será

$$\begin{aligned}I^\alpha I^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^x (x-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau) d\tau \\ &= I^{\alpha+\beta} f(x).\end{aligned}$$

A lei de expoñentes é importante no senso que fai conmutativo o operador integral fraccionario de Riemann-Liouville:

$$I^\alpha I^\beta f(x) = I^{\alpha+\beta} f(x) = I^{\beta+\alpha} f(x) = I^\beta I^\alpha f(x).$$

Tamén grazas a esta lei, un sinxelo razoamento indutivo motiva, se cabe aínda máis, a definición 2.1.

Poñamos $\alpha = n \in \mathbb{N}$.

Se $n = 1$, da fórmula integral de Cauchy das integrais repetidas, temos que

$$[If](x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Supoñamos o resultado certo para n , e verifiquémolo para $n + 1$:

$$\begin{aligned}
 [I^{n+1}f](x) &= I(I^n f(x)), \quad (\text{Lei de expoñentes, I4}) \\
 &= I\left(\frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{x_1} (x_1 - t)^{n-1} f(t) dt\right) \\
 &= \int_0^x \left(\frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{x_1} (x_1 - t)^{n-1} f(t) dt\right) dx_1 \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x f(t) \left(\int_t^x (x_1 - t)^{n-1} dx_1\right) dt, \quad (\text{Fubini}) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x f(t) \left[\frac{(x_1 - t)^n}{n}\right]_t^x dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^x (x - t)^n f(t) dt,
 \end{aligned}$$

e como por hipóteses de indución é certo para n , séguese o resultado desexado.

A propiedade **I2** anteriormente descrita ofrece tamén unha xustificación en termos dunha convolución no caso en que $\alpha \notin \mathbb{N}$.

Ofrecida esta definición, e resaltadas as súas propiedades, imos familiarizarnos cos cálculos a través dalgún exemplo:

Exemplo 1: (Regra da potencia, "Power Rule")

Sexa $\alpha > 0$ $f(x) = x^\mu$ con $\mu > -1$, $x > 0$. Tratamos de calcular $I^\alpha f(x)$.

$$\begin{aligned}
 I^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - t)^{\alpha-1} t^\mu dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} x^{\alpha-1} t^\mu dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - u)^{\alpha-1} x^{\alpha-1} (ux)^\mu x du, \quad \left(u = \frac{t}{x}\right) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha+\mu} \int_0^1 (1 - u)^{\alpha-1} u^\mu du \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha+\mu} \int_0^1 (1 - u)^{\alpha-1} u^{(\mu-1)+1} du \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha+\mu} \beta(\mu + 1, \alpha), \quad (\text{definición función beta}) \\
 &= \frac{\Gamma(\mu + 1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu + \alpha + 1)} x^{\alpha+\mu}, \quad (\text{propiedade B1 da función beta}) \\
 &= \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + \alpha + 1)} x^{\alpha+\mu}.
 \end{aligned}$$

Así, o cálculo feito mostra que:

$$I^\alpha x^\mu = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + \alpha + 1)} x^{\alpha+\mu}, \quad \alpha > 0, \mu > -1, x > 0.$$

Esta regra é especialmente útil se fose necesario realizar o cálculo de expresións polinómicas con potencia fraccionaria, ou non, do tipo:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{\mu_k}, \quad -1 < \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_n, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Notar ademais que esta regra da potencia tamén é de utilidade no caso de querer calcular a integral fraccionaria de orde $\alpha > 0$ dunha constante c :

$$I^\alpha c = \frac{c}{\Gamma(\alpha + 1)} x^\alpha.$$

En particular se $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\mu = 0, 1, 2$, temos:

$$I^{\frac{1}{2}} x^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}.$$

$$I^{\frac{1}{2}}x^1 = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})}x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{4}\Gamma(\frac{1}{2})}x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}.$$

$$I^{\frac{1}{2}}x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})}x^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{\frac{15}{8}\Gamma(\frac{1}{2})}x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}}.$$

Exemplo 2: Sexa $f(t) = 1$ e $\alpha = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} I^{\frac{1}{2}}(1) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt \quad (\text{con } t = x-u) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x u^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^x \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

O exemplo é de cálculo sinxelo, e garda concordancia ca lei do exemplo anterior, pode comprobarse, pero realmente o interesante é observar o seguinte:

$$\begin{aligned} I^{\frac{1}{2}}I^{\frac{1}{2}}(1) &= I^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}I^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{2x}{\pi} \int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}} du, \quad (t = ux) \\ &= \frac{2x}{\pi} \int_0^1 u^{\frac{3}{2}-1} (1-u)^{\frac{1}{2}-1} du \\ &= \frac{2x}{\pi} \beta\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{2x}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)}, \quad (\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)) \\ &= \frac{2x}{\pi} \cdot \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \sqrt{\pi}}{1} \\ &= x, \end{aligned}$$

é dicir, ó aplicar por dúas veces o operador integral de Riemann-Liouville á función $f(t) = 1$, recupérase o resultado no seu senso elemental.

Notemos ademais que isto compórtase ben ca lei de expoñentes, pois:

$$I^{\frac{1}{2}}I^{\frac{1}{2}}(1) = I(1) = \int_0^x dt = x.$$

Á vista dos cálculos mostrados nos dous exemplos anteriores, podería parecer que realizar o cálculo integral fraccionario é doado. Isto non é certo en xeral, como cabería supoñer, e en moitas ocasións realizar cálculos con operador de orde fraccionario resulta extremadamente complicado, e require unha soltura maior no cálculo integral que ata aquí amosada, así como coñecer máis conceptos de teoría fraccionaria cos vistos ata agora.

Proposición 2.2. *A transformada de Laplace da integral fraccionaria de Riemann-Liouville:*

$$\mathcal{L}[I^\alpha f(x)] = \frac{F(p)}{p^\alpha}.$$

Proba.

Consideremos primeiramente o caso en que $\alpha = n \in \mathbb{N}$.

Tendo presente as propiedades **I1** e **I2** da definición 2.1, e que a transformada de Laplace dunha convolución e o

produto das transformadas que a involucran, dedúcese:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[I^n f(x)] &= \mathcal{L}(\phi * f)(x) = \mathcal{L}[\phi(t)]\mathcal{L}[f(x)] \\
 &= \mathcal{L}[\phi(t)]F(p) = \frac{1}{\Gamma(n)}\mathcal{L}[t^{n-1}]F(p) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n)}\frac{\Gamma(n)}{p^n}F(p), \text{ (propiedade } \mathbf{L8} \text{) de T.L.)} \\
 &= \frac{F(p)}{p^n}.
 \end{aligned}$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}^+$, polo razoado con anterioridade, abonda con determinar $\mathcal{L}[t^{\alpha-1}]$.

Resulta que:

$$\mathcal{L}[t^{\alpha-1}] = \int_0^\infty e^{-pt} t^{\alpha-1} dt$$

e considerando o cambio de variable $u = pt \Rightarrow t = \frac{u}{p} \Rightarrow dt = \frac{du}{p}$, obtemos:

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^{\alpha-1} dt = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{p}\right)^{\alpha-1} \frac{du}{p} = \frac{1}{p^\alpha} \Gamma(\alpha),$$

pola representación integral da función gamma.

Así pois:

$$\mathcal{L}[I^\alpha f(x)] = \frac{F(p)}{p^\alpha}.$$

□

Proposición 2.3. *Se f é unha función periódica e integrable en $[-\pi, \pi]$, entón:*

$$If(x) \text{ } 2\pi\text{-periódica} \iff \int_0^{2\pi} f(t) dt = 0.$$

Proba.

($\Rightarrow$)

Se $If(x)$ 2π -periódica, entón:

$$(1) \quad If(x) = If(x + 2\pi),$$

$$(2) \quad \int_0^{2\pi} f(t) dt = \int_x^{x+2\pi} f(t) dt.$$

Agora de

$$If(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

e

$$If(x + 2\pi) = \int_0^{x+2\pi} f(t) dt$$

restando ambas, por (1) deducimos:

$$0 = \int_0^x f(t) dt - \int_0^{x+2\pi} f(t) dt \Rightarrow \int_0^x f(t) dt = \int_0^{x+2\pi} f(t) dt. \quad (3)$$

Pero

$$\int_0^{x+2\pi} f(t) dt = \int_0^x f(t) dt + \int_x^{x+2\pi} f(t) dt,$$

e así (3) realmente é

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x f(t) dt + \int_x^{x+2\pi} f(t) dt \Rightarrow \int_x^{x+2\pi} f(t) dt = 0,$$

e de (2), séguese que

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0.$$

($\Leftarrow$)

Como por hipóteses f é unha función periódica e integrable en $[-\pi, \pi]$, f admite un desenrolo en serie de Fourier da forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)),$$

onde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx, \quad n \geq 1.$$

Posto que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$ debe ser $a_0 = 0$, e así

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)).$$

Temos pois:

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n(x + 2\pi)) + b_n \operatorname{sen}(n(x + 2\pi))) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

logo

$$If(x) = If(x + 2\pi) \Rightarrow If(x) \text{ é } 2\pi - \text{periódica.}$$

□

Recensión matemática: *Joseph Liouville (1809-1882). Foi un matemático francés. Ocupou o cargo de profesor na Escola Politécnica de París en 1833, onde se graduou. Posteriormente, en 1836, fundaría un diario de matemáticas, “Diario das matemáticas puras e aplicadas”, en ocasións chamado “Diario de Liouville”, e grazas ó cal deuse a coñecer as matemáticas de Francia ó longo do século XIX.*

Liouville traballou nunha cantidade moi diversa de campos en matemáticas, que inclúen a teoría de números, onde foi o primeiro en probar a existencia dos números transcendentos; a análise complexo, onde é recordado por un teorema que leva seu nome; topoloxía diferencial, e especialmente na física matemática, onde hoxe en día é estudado baixo a teoría de Sturm-Liouville, útil para resolver certas ecuacións diferenciais, como fomos testemuñas no máster na materia de Análise funcional.

Ademais, como neste traballo se amosa, contribuíu dun xeito notable no desenrolo dunha teoría fraccionaria, centrándose especialmente nas integrais e derivadas de índice fraccionario, que levan o seu nome á par de Riemann.

Autor duns 400 escritos, foi a maior influencia no traballo de Évariste Galois, ó ser o primeiro en ler e recoñecer as súas obras inéditas que posteriormente publicaría no seu diario en 1846.

Faleceu o 8 de setembro de 1882 en París.

2.2. Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

Dada unha función diferenciable f , definida nun intervalo (a, b) , a derivada D asigna a f unha nova función $Df(x) = f'(x)$. Derivando novamente $D(Df(x)) = Df'(x) = f''(x)$.

En xeral a derivada n -ésima de f é $D^n f(x) = D(D^{n-1} f(x)) = f^{(n)}(x)$, sendo n un enteiro positivo.

A notación de Leibniz, introducida en 1695 nunha publicación súa, para referirse a n -ésima derivada:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n},$$

en principio inofensiva, fixo plantar preguntas como que ocorrería se $n = \frac{1}{2}$, formulada por L'Hopital.

Esta pregunta espertou o interese moitos matemáticos da época. Co fin de atopar unha resposta, desenrolaron toda unha teoría matemática que hoxe en día recibe o nome **Cálculo Fraccionario**.

De entre eles poderíamos citar a Euler, Lagrange, Riemann, Liouville, Cauchy, Hadamard, etc.

O enfoque de Riemann-Liouville referente a integración fraccionaria, como vimos, atopou a súa razón de ser a través do concepto de integración repetida, e a posterior xeneralización a unha orde arbitraria grazas á función gamma de Euler. No senso da derivada fraccionaria, unha mesma importancia quixeron descubrir neste operador, e o mesmo instinto matemático foi usado para tal fin, o que levou a xeneralizar o operador de derivación a unha orde arbitraria a través da seguinte definición:

Definición 2.4. Para un número real $\alpha > 0$ e unha función $f \in L_1(0, 1)$, a expresión

$$[D^\alpha f](x) = [D^n I^{n-\alpha} f](x),$$

onde $n = [\alpha] + 1$ se $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $n = \alpha$ se $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, denomínase **derivada fraccionaria de Riemann-Liouville** de orde α .

Propiedades:

D1): É lineal, é dicir, para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $f, g \in L_1(0, 1)$, será

$$[D^\alpha(\lambda f + \mu g)](x) = \lambda D^\alpha f(x) + \mu D^\alpha g(x).$$

D2): Para $f \in L_1(0, 1)$, verifícase:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} [D^\alpha f](x) = f(x),$$

para case todo $x \in [0, 1]$.

Da definición 2.4, temos:

$$[D^\alpha f](x) = D^n \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \right),$$

que pasando a límites

$$\begin{aligned}
 \lim_{\alpha \rightarrow 0} [D^\alpha f](x) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} D^n \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \right) \\
 &= D^n \left(\frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \right) \\
 &= D^n [I^n f](x) \\
 &= f(x).
 \end{aligned}$$

D3): Para $f \in L_1(0, 1)$, verifícase:

$$[D^\alpha I^\alpha f](x) = f(x),$$

para case todo $x \in [0, 1]$.

Obviamente se $\alpha \in \mathbb{N}$ o resultado é inmediato. Tomemos pois $\alpha \notin \mathbb{N}$, $\alpha > 0$.

Como $n = [\alpha] + 1$, será $n - \alpha > 0$, e da lei de expoñentes **I4** da integral fraccionaria, resulta:

$$I^n f(x) = I^{n-\alpha} I^\alpha f(x),$$

e da definición 2.4 séguese:

$$\begin{aligned}
 D^\alpha I^\alpha f(x) &= D^n I^{n-\alpha} I^\alpha f(x) \\
 &= D^n I^n f(x) \\
 &= f(x).
 \end{aligned}$$

Observación: Esta última propiedade pon de manifesto, ó igual que ocorre no cálculo elemental, que o operador de derivada fraccionaria é inverso pola esquerda do operador de integración fraccionaria. Sen embargo, a regra básica de integración no senso elemental:

$$\int f'(t) dt = f(t) + C,$$

non atopará o seu homólogo, en xeral, no cálculo fraccionario.

Imos agora a familiarizarnos cos seus cálculo a través dalgún exemplo:

Exemplo 1: Estamos interesados en calcular $D^\alpha f(x)$ sendo $f(x) = x^\mu$ con $\alpha > 0$ e $\mu > -1$.

Da definición de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, temos:

$$\begin{aligned}
 D^\alpha f(x) &= D^n (I^{n-\alpha} x^\mu) \\
 &= D^n \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} t^\mu dt \right) \\
 &= D^n \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{n-\alpha-1} x^{n-\alpha-1} t^\mu dt \right) \\
 &= D^n \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{n-\alpha-1} x^{n-\alpha-1} (ux)^\mu x du \right), \quad \left(u = \frac{t}{x}\right) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{n-\alpha-1} u^\mu du (D^n x^{n-\alpha+\mu}) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \beta(\mu+1, n-\alpha) D^n x^{n-\alpha+\mu}, \quad (\text{definición función beta}) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha+\mu+1)} \right) \left(\frac{\Gamma(n-\alpha+\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} x^{\mu-\alpha} \right) \\
 &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} x^{\mu-\alpha},
 \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade é consecuencia da propiedade **B1** da función beta, e da regra de Leibnitz:

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{n-\alpha+\mu} = \frac{\Gamma(n-\alpha+\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} x^{\mu-\alpha}.$$

É dicir, o cálculo feito mostra que:

$$D^\alpha x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} x^{\mu-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad \mu > -1, \quad x > 0.$$

Notar que se $\alpha = n$, entón:

$$D^n f(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu - n + 1)} x^{\mu - n}.$$

En particular, para $\alpha = \frac{1}{2}$, entón $n = 1$, e $\mu = 0, 1, 2$, temos que:

$$D^{\frac{1}{2}} x^0 = D^1 \left(I^{\frac{1}{2}} x^0 \right) = D^1 \left(2\sqrt{\frac{x}{\pi}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x\pi}}.$$

$$D^{\frac{1}{2}} x^1 = D^1 \left(I^{\frac{1}{2}} x^1 \right) = D^1 \left(\frac{4}{3} \sqrt{\frac{x^3}{\pi}} \right) = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}.$$

$$D^{\frac{1}{2}} x^2 = D^1 \left(I^{\frac{1}{2}} x^2 \right) = D^1 \left(\frac{16}{15} \sqrt{\frac{x^5}{\pi}} \right) = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{x^3}{\pi}}.$$

Exemplo 2:

Neste caso, estamos interesados en calcular a derivada fraccionaria de orde $\alpha = \frac{1}{2}$ de $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$.

$$\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow n = 1.$$

Logo

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}} f(x) &= DI^{\frac{1}{2}} f(x) \\ &= D \left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt \right) \\ &= D \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}} du \right), \quad (t = ux) \\ &= D \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \beta \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right) \\ &= D \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} \right), \quad \left(D = \frac{d}{dx} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isto compórtase ben ca regra de potencias anterior, pois:

$$D^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(0)} x^{-1} = 0.$$

Ademais, se volvemos a aplicar o operador derivada:

$$D^{\frac{1}{2}} \left[D^{\frac{1}{2}} (x^{-\frac{1}{2}}) \right] = D^{\frac{1}{2}} (0) = 0,$$

e doutra banda

$$\begin{aligned} D(x^{-\frac{1}{2}}) &= D \left(I(x^{-\frac{1}{2}}) \right) \\ &= D \left(\int_0^x t^{-\frac{1}{2}} dt \right) \\ &= D \left(2t^{\frac{1}{2}} \Big|_0^x \right) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Observación: Un feito coñecido na derivación ordinaria é o seguinte:

$$D^m (D^n f(x)) = D^{m+n} f(x), \quad m, n = 1, 2, \dots$$

O exemplo anterior pon de manifesto que, en xeral, isto non se verifica na derivación fraccionaria, é dicir, neste caso ó contrario que ocorría na integración fraccionaria, os operadores non conmutan. En [6] da bibliografía, (ver páxina 74), advirten deste feito e estudan as condicións baixo as cales o operador de derivación fraccionaria é conmutativo, pero en xeral:

$$D_a^\alpha (D_a^\beta f(t)) = D_a^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=1}^n [D^{\beta-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(1-\alpha-k)}.$$

Aínda hai máis resultados relativos a derivada fraccionaria que poden resultar curiosos.

No senso ordinario, tamén é sabido que a derivada dunha constante é nula. Isto non encontra o seu homólogo no cálculo fraccionario, isto é, hai funcións constantes para as cales a súa derivada fraccionaria non é nula.

Tal ocorre se aplicamos á función $f(x) = 1$ o operador fraccionario de orde $\alpha = \frac{1}{2}$.

Proposición 2.5. *A transformada de Laplace da derivada fraccionaria de Riemann-Liouville:*

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(x)] = p^\alpha F(p) - \sum_{k=1}^n p^{k-1} D^{\alpha-k} f(0).$$

Proba.

Da definición 2.4 e tendo presente a propiedade da transformada de Laplace da n -ésima derivada, resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[D^\alpha f(x)] &= \mathcal{L}\left(\frac{d^n}{dx^n} I^{n-\alpha} f(x)\right) \\ &= p^n \mathcal{L}[I^{n-\alpha} f(x)] - \sum_{k=0}^{n-1} p^k \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} I^{n-\alpha} f(0) \\ &= p^n \frac{F(p)}{p^{n-\alpha}} - \sum_{k=0}^{n-1} p^k D^{(\alpha-k-1)} f(0) \\ &= p^\alpha F(p) - \sum_{k=1}^n p^{k-1} D^{(\alpha-k)} f(0). \end{aligned}$$

□

Observación: No caso de aplicar a transformada de Laplace nunha ecuación diferencial de orde fraccionario, notar que neste caso concreto require o uso de condicións iniciais, en xeral, de orde fraccionario, o cal non ten unha interpretación física clara.

O seguinte lema pode refutarse en [1] da bibliografía, concretamente o lema 2.5. Introducímolo dando o resultado xeral, que logo particularizaremos para o noso caso concreto:

Lema 2.6. *Sexan $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ e denotemos por $f_{n-\alpha} = I_{a+}^{n-\alpha} f$. Verifícase:*

a) Se $1 \leq p \leq \infty$ e $f \in I_{a+}^\alpha(L_p)$, entón:

$$(I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f)(x) = f(x).$$

b) Se $f \in L_1(a, b)$ e $f_{n-\alpha} \in AC^n[a, b]$, ten validez a expresión:

$$(I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{j=1}^n \frac{f_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)} (x-a)^{\alpha-j},$$

en case todo punto $x \in [a, b]$.

En particular, se $0 < \alpha < 1$, entón:

$$(I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f)(x) = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha-1},$$

mentres que para $\alpha = n \in \mathbb{N}$, ten validez a seguinte expresión:

$$(I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Es lema é especialmente útil á hora de resolver ecuacións diferencias fraccionarias mediante o método de operadores fraccionarios que na sección 2.6 do presente tema introduciremos, e tamén para que algún dos resultados que na sección de periodicidade introducimos, non apareza orfo.

Recensión matemática: *George Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866). Foi un matemático alemán. Realizou importantes contribucións ó análises e a xeometría diferencial, e grazas a iso facilitou o camiño para o desenvolvemento máis*

avanzado da relatividade xeral.

Fillo dun pastor luterano, a súa primeira ambición foi a de seguir os pasos de seu pai. Ingresou no liceo de Hannover, onde estudou hebreo e tratou de probar a certeza do libro do Xéneses por medio de razoamentos matemáticos. En 1846 ingresou na Universidade de Gotinga, que abandonou un ano despois para trasladarse á de Berlín e estudar baixo a tutela de, entre outros, Jakob Steiner, Carl Gustav Jacobi e Peter Gustav Lejeune Dirichlet, quen exerceu unha grande influencia sobre el.

A súa carreira interrompese en 1848 debido á revolución. Un par de anos despois regresa a Göttingen, e en 1851 doutorase cunha tese nesa universidade, a cal foi moi eloxiada por Carl Friedrich Gauss, considerado príncipe das matemáticas. Nela Riemann estudou a teoría das variedades complexas e, en particular, o que hoxe en día recibe o nome de superficies de Riemann, e introduciu na mesma os métodos topolóxicos. Despois do seu doutoramento formulou a hipóteses de Riemann, un dos problemas máis importantes, matematicamente falando, aberto aínda nos nosos días.

Aínda que as súas obras non foron moi numerosas, todas teñen un valor fundamental. Na súa corta vida contribuíu en moitas ramas das matemáticas: integrais de Riemann, aproximación de Riemann, método de Riemann para series trigonométricas, matrices de Riemann da teoría de funcións abelianas, función zeta de Riemann, hipóteses de Riemann, teorema de Riemann-Roch, lema de Riemann-Lebesgue, e como non as integrais de Riemann-Liouville de orde fraccionaria que aquí amosamos, entre outros.

Riemann dou as súas primeiras conferencias en 1854, nas cales fundou o campo da xeometría de Riemann, materia do máster en matemáticas da USC. Ascendido a profesor extraordinario na universidade de Göttinga en 1857, fíxose profesor ordinario en 1859, o que fai gala da súa humildade. En 1862 casouse con Elise Koch.

O exceso de traballo minou o seu fráxil organismo, e nos seus últimos anos pasou pasou largas temporadas en Italia, onde trataba de atopar unha cura para a súa grave afección pulmonar.

Faleceu de tuberculose na súa terceira viaxe a Italia antes de cumprir os 40 anos.

Debido á importancia matemática da **Hipóteses de Riemann**, tratamos de dar unha breve descrición do problema para goce do lector. Non entraremos en cuestións técnicas, pero calquera dos resultados aquí indicados pode refutarse en [2] da bibliografía, entre outros.

No que segue $s = \sigma + it$ é un número complexo onde $\text{Re}(s) = \sigma$ e $\text{Im}(s) = t$.

Non foi outro que Euler quen observou que para $\sigma > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

onde p recorre tódolos números primos e:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

é a expresión da función zeta de Riemann no semiplano $\sigma > 1$.

Como consecuencia disto, tense que $\zeta(s) \neq 0$ para $\sigma > 1$.

Agora estenderemos $\zeta(s)$ ó semiplano $\sigma > 0$.

Para $s \neq 1$, $\sigma > 0$ e $N \geq 1$, resulta:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}N^{-s} + s \int_N^{\infty} \frac{\rho(u)}{u^{s+1}} du,$$

onde $\rho(u) = \frac{1}{2} - \{u\}$, sendo $\{u\}$ a parte fraccionaria de u .

Esta é a prolongación analítica ao semiplano $\sigma > 0$, salvo en $s = 1$ onde presenta un polo simple con residuo igual a 1. Notar que para $N = 1$ a expresión anterior pódese escribir como:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + s \int_1^{\infty} \frac{\rho(u)}{u^{s+1}} du.$$

Para $s \neq 0, 1$, a ecuación funcional da función zeta de Riemann, permite estender a mesma a todo o plano complexo:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{(1-s)}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

Definindo:

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

a ecuación funcional da función $\zeta(s)$ toma a forma:

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

A función así definida resulta ser enteira de orde 1, e chámase función ξ de Riemann.

A partir da ecuación funcional, é doado deducir que $\zeta(-2n) = 0$ para $n = 1, 2, \dots$, doado, se cabe, grazas a Euler.

Tales ceros denomínanse triviais, e son os únicos tales que $\operatorname{Re}(s) = \sigma < 0$.

Para $s = 0$, $\zeta(s) \neq 0$, pois como $\zeta(s)$ presenta un polo simple en $s = 1$, co cal $\zeta(1-s)$ o presentará en $s = 0$, e dado que a función $\Gamma(s)$ presenta polos simples en $s = 0, -1, -2, \dots, -n, \dots$, será $\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}\zeta(1-s) \neq 0$, ó cancelarse mutuamente o polo simple da función $\zeta(1-s)$ co cero simple da función $\Gamma^{-1}(\frac{s}{2})$.

Aparte dos ceros triviais, a función zeta presenta infinitos ceros no que se coñece como banda crítica, ($0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$), e estes reciben o nome de ceros non triviais. Usualmente denótanse como $\rho = \beta + i\gamma$.

O seguinte teorema é fundamental:

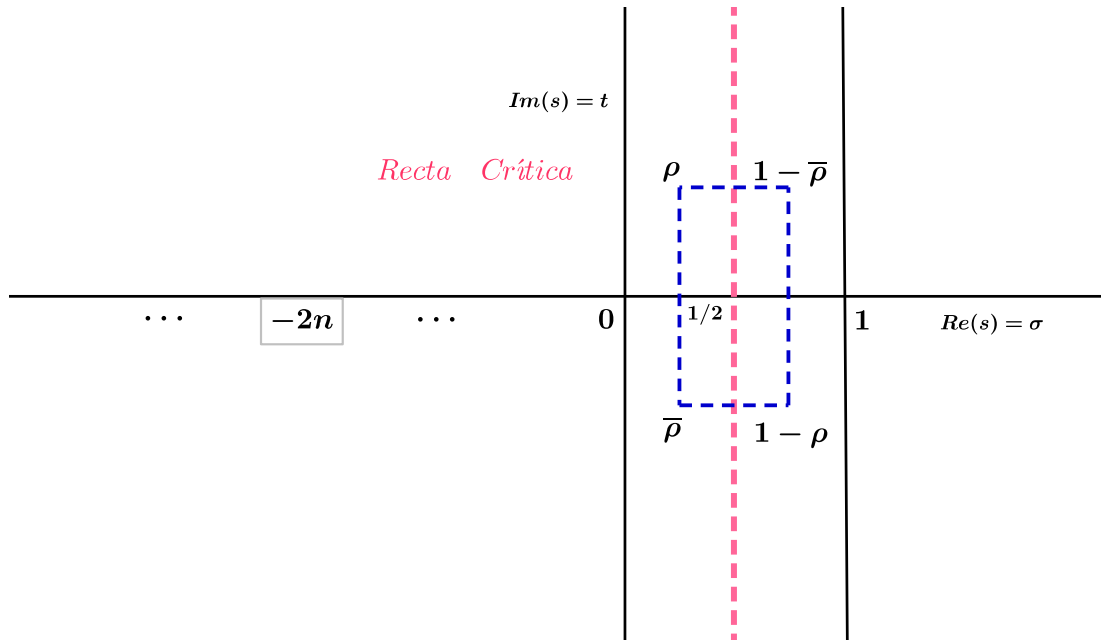
Teorema: A función $\xi(s)$ é enteira de orde un e ten infinitos ceros ρ_n na banda crítica. A serie $\sum |\rho_n|^{-1}$ diverxe, mentres que a serie $\sum |\rho_n|^{-1-\varepsilon}$ converge para calquera $\varepsilon > 0$. Os ceros de $\xi(s)$ son precisamente os ceros non triviais de $\zeta(s)$.

Xa con isto seremos capaces de entender a **Hipóteses de Riemann**: Foi en 1859 cando conxecturou por primeira vez que se $\zeta(\sigma + it) = 0$ con $0 \leq \sigma \leq 1$, entón $\sigma = \frac{1}{2}$.

Esta é a coñecida Hipóteses de Riemann, aínda por refutar ou contradicir.

A recta $\sigma = \frac{1}{2}$ denomínase recta crítica.

Unha gráfica que describe o dito ata agora é a seguinte:



No programa de investigación de David Hilbert no Congreso Internacional de Matemáticas de 1900 en París, Hilbert propuxo a **Hipóteses de Riemann** como un dos problemas máis importantes aos que, matemáticos e amigos, deberían facer fronte ao longo do século XX. Ó ser preguntado que faría se despertase despois de durmir durante cincocentos anos, respondeu que a súa primeira pregunta sería se a **Hipóteses de Riemann** foi probada. Este problema, aínda aberto, está incluído no premio do milenio do Instituto Clay de Matemáticas.

Dende que Riemann plantou tal conxectura, o desenrolo da teoría da función zeta deu cabida a probar un dos resultados máis importantes en teoría de números: **O teorema dos números primos**.

En 1914 Hardy, G.H, probou que na liña crítica $\sigma = \frac{1}{2}$ a función zeta ten infinitos ceros, peso isto non impide que exista outra rexión tamén con infinidade dos mesmos.

Ata os nos días, existen resultados de especial índole, debido que moitos foron os que traballaron sobre a **Hipóteses de Riemann**, cada vez sobre rangos máis grandes.

Ata onde sabemos, segue a ser un dos problemas abertos máis importante, agora, do século XXI.

Para contradicila, un simple contra-exemplo bastaría, pero aínda que hai moitos matemáticos escépticos sobre a veracidade da mesma, non é menos certo que existen computadores que calcularon moitos ceros no lugar onde Riemann conxecturou, e de momento ningún fóra de alí. Por exemplo, sábese que os primeiros $1,5 \times 10^9$ ceros non triviais da función zeta, descansan sobre a liña crítica. Para a comunidade matemática, isto non é considerado proba algunha.

Para probala, como é costume na análise matemática, unha boa cota resolve un gran problema.

Imaxinemos que somos capaces de establecer unha rexión libre de ceros, é dicir, $\zeta(s) \neq 0$ para:

$$\operatorname{Re}(s) > 1 - C(\sigma, t),$$

sendo $C(\sigma, t) > 0$ unha cota tal que $C(\sigma, t) \rightarrow \frac{1}{2}$ cando $\operatorname{Im}(s) \rightarrow \infty$.

Teríamos pois que $\zeta(s) \neq 0$ na rexión $\sigma > \frac{1}{2}$, e da relación $\xi(s) = \xi(1-s)$ dentro da banda crítica, tamén $\zeta(s) \neq 0$ para $\sigma < \frac{1}{2}$.

Consecuentemente se $\zeta(\sigma + it) = 0$, debería ser $\sigma = \frac{1}{2}$.

2.3. Derivada fraccionaria segundo Caputo.

A definición de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville tivo un papel moi importante no desenrolo da teoría fraccionaria e das súas aplicacións puramente matemáticas: definición de novas clases de funcións, sumas de series, solución de ecuacións diferenciais de orde enteiro,...

Desafortunadamente o enfoque de Riemann-Liouville conduce ás condicións iniciais que conteñen os valores límite da derivada fraccionaria de Riemann-Liouville no seu límite inferior $a = 0$, (no noso caso). Estamos falando de condicións iniciais, por exemplo, do tipo:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0^+} D^{\alpha-1} f(t) = b_1, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} D^{\alpha-2} f(t) = b_2, \\ \vdots \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} D^{\alpha-n} f(t) = b_n. \end{cases}$$

A pesar de que os problemas suxeitos a este tipo de condicións iniciais poden ser resoltos de maneira xeitosa, as súas solucións son pouco útiles, debido a que non é coñecida unha interpretación física clara para este tipo de condicións iniciais.

Ao longo do século XX as matemáticas foron empregadas para modelar problemas físicos concretos, os cales dispoñían de condicións iniciais físicas expresadas a través de derivadas clásicas. O cálculo da transformada de Laplace da derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, como vimos, non abarca este marco de interpretación física, requirindo o emprego de condicións iniciais como as anteriormente descritas, pero o desexado era obter unha orde natural como a modelaxe de fenómenos físicos requiría.

Á vista disto, naceu a necesidade de introducir unha nova definición que tivera en conta a interpretación física clásica. Liouville preveu este feito, e a súa testemuña foi recollida M. Caputo. Esta nova definición ten a vantaxe, con respecto a anterior, que unicamente require coñecer os valores iniciais da función f considerada e das súas sucesivas derivadas de orde enteiro, se é aplicado conxuntamente a través do operador de Laplace.

Ofrecido pois por M. Caputo, tivo unha ampla aplicación en viscoelasticidade, onde a modelaxe empregando a derivada fraccionaria de Caputo deu lugar a melloras considerables relativas á descrición do material considerado.

Estamos a falar da seguinte definición de derivada fraccionaria no senso de Caputo:

Definición 2.7. Sexa $n = [\alpha] + 1$ se $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $n = \alpha$ se $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Se $f(x) \in AC^n[0, 1]$ entón ${}^C D^\alpha f$ existe en case todo punto $x \in [0, 1]$ e esta defínese como:

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha f(x) &= I^{n-\alpha} (D^n f)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt. \end{aligned}$$

Observación: Notar que no senso de Caputo, a derivada dunha constante si é a función nula.

Tamén é ben coñecida a seguinte identidade para unha función f axeitada, por exemplo para unha función f n -veces derivable, que nós particularizamos para o caso no que o límite inferior sexa 0:

$$D^\alpha f(x) = {}^C D^\alpha \left(f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right) (x),$$

onde $n = [\alpha] + 1$ se $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $n = \alpha$ se $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Isto permite introducir un definición da derivada fraccionaria segundo Caputo orde $\alpha > 0$ vía a derivada fraccionaria de Riemann-Liouville:

$${}^C D^\alpha f(x) = D^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right) (x),$$

onde $n = [\alpha] + 1$ se $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $n = \alpha$ se $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Á vista disto, é claro que se $0 < \alpha < 1$, entón:

$${}^C D^\alpha f(x) = D^\alpha (f(t) - f(0)) (x).$$

Propiedades:

C1): É lineal, é dicir, para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $f, g \in L_1(0, 1)$, será

$$[{}^C D^\alpha (\lambda f + \mu g)](x) = \lambda {}^C D^\alpha f(x) + \mu {}^C D^\alpha g(x).$$

C2): Para $f \in L_1(0, 1)$, verifícase

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} {}^C D^\alpha f(x) = f^{(n)}(x), \quad \alpha > 0.$$

Da definición de derivada fraccionaria segundo Caputo temos

$${}^C D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt,$$

que facendo partes con $u = f^{(n)}(t) \Rightarrow du = f^{(n+1)}(t)dt$ e $dv = (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt$ logo $v = -\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha}$, resulta

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[\left(-\frac{f^{(n)}(t)(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right) \Big|_0^x + \frac{1}{n-\alpha} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(t) dt \right] \\ &= \frac{f^{(n)}(0)x^{n-\alpha}}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)} + \frac{1}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(t) dt, \quad (\text{Ec. funcional gamma}) \\ &= \frac{f^{(n)}(0)x^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Para rematar, pasando a límites ambos membros da anterior igualdade, obtense o desexado:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n} {}^C D^\alpha f(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \left(\frac{f^{(n)}(0)x^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(t) dt \right) \\ &= f^{(n)}(0) + \int_0^x f^{(n+1)}(t) dt \\ &= f^{(n)}(x). \end{aligned}$$

C3): Para $f \in L_1(0,1)$, verifícase:

$${}^C D^\alpha I^\alpha f(x) = f(x),$$

para case todo $x \in [0,1]$.

Proposición 2.8. *A transformada de Laplace da derivada fraccionaria segundo Caputo*

$$\mathcal{L} [{}^C D^\alpha f(x)] = p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-k-1} D^k f(0).$$

Proba.

Da definición de derivada fraccionaria de Caputo

$${}^C D^\alpha f(x) = I^{n-\alpha} (D^n f)(x) = I^{n-\alpha} g(x),$$

sendo $g(x) = D^n f(x)$.

Aplicando o operador de Laplace, e tendo presente que coñecemos a transformadas de Laplace da integral e derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [{}^C D^\alpha f(x)] &= \mathcal{L} [I^{n-\alpha} g(x)] = \frac{G(p)}{p^{n-\alpha}} \\ &= p^{\alpha-n} \mathcal{L} [D^n f(x)] = p^{\alpha-n} \left(p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k D^{n-k-1} f(0) \right) \\ &= p^\alpha F(p) - p^{\alpha-n} \sum_{k=0}^{n-1} p^k D^{n-k-1} f(0) \\ &= p^\alpha F(p) - p^{\alpha-n} (D^{n-1} f(0) + p D^{n-2} f(0) + \dots + p^{n-1} D^0 f(0)) \\ &= p^\alpha F(p) - p^{\alpha-n} D^{n-1} f(0) + p^{\alpha-n+1} D^{n-2} f(0) + \dots + p^{\alpha-1} D^0 f(0) \\ &= p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-k-1} D^k f(0). \end{aligned}$$

□

Observación: Notar que uso de derivada fraccionaria segundo Caputo facilita o proceso de resolución de problemas concretos. Ó aplicar a transformada de Laplace a este operador podemos usar condicións enteiras iniciais clásicas, e polo tanto de interpretación física coñecida.

Lema 2.9. *Sexa $\alpha > 0$ e $n = [\alpha] + 1$ se $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $n = \alpha$ se $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Se $f \in AC^n[0, 1]$ ou $f \in C^n[0, 1]$, entón:*

$$(I^\alpha {}^C D^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Proba. Como por hipóteses $f \in AC^n[0, 1]$ ou $f \in C^n[0, 1]$, da definición segundo Caputo temos que:

$${}^C D^\alpha f(x) = I^{n-\alpha} D^n f(x).$$

Distingamos os casos:

i) Se $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entón $n = \alpha$, polo que:

$${}^C D^\alpha f(x) = D^n f(x),$$

e o resultado séguese do lema 2.6 particularizando no caso que nos ocupa, $a = 0$.

ii) Se $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, entón $n = [\alpha] + 1$ polo que $n - \alpha > 0$, e así aplicando a lei de expoñentes **I4**, resulta:

$$(I^\alpha {}^C D^\alpha)(x) = I^\alpha (I^{n-\alpha} D^n f(x)) = I^n D^n f(x),$$

e de novo o resultado séguese do lema 2.6. □

2.4. Sobre a periodicidade da derivada e integral fraccionaria.

Os resultados desta sección baséanse en [5] da bibliografía.

É un feito coñecido que a derivada dunha función periódica, no senso usual e sempre que exista, é unha función periódica. Referíndonos ás primitivas de funcións periódicas, en ocasións tamén resultan ser periódicas, como ocorre ca función $\cos x$ como primitiva da función $\sin x$.

O concepto de periodicidade anterior non ten o seu homólogo no cálculo fraccionario no senso que a derivada e integral de orde fraccionario de funcións periódicas, non son tal, salvando a excepción da función nula.

Sexan $T > 0$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función T -periódica con $f \in C^1(\mathbb{R})$, entón f' é tamén T -periódica.

Sen embargo, a primitiva de f

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

non é, en xeral, T -periódica. Basta tomar por exemplo $f(x) = 1$ e ver que $F(x) = x$ non é T' -periódica para calquera $T' > 0$.

Unha condición necesaria e suficiente para que F sexa T -periódica é que

$$\int_0^T f(t) dt = 0.$$

Como dixemos, pretendemos ver que a derivada e a primitiva de orde fraccionario dunha función T -periódica non pode ser T -periódica, salvando a excepción, da función nula.

Escribamos

$$F = I^1 f, \quad f' = D^1 f$$

e como sabemos

$$D^1 (I^1 f)(x) = D^1 F(x) = f(x)$$

pero

$$I^1 (D^1 f)(x) = I^1 f'(x) = f(x) - f(0),$$

é dicir, $I^1 (D^1 f)(x) \neq f(x)$ salvo que $f(0) = 0$.

Sexa $\alpha \in (0, 1)$. Entón se $f \in L_1(\mathbb{R})$ a integral fraccionaria de Riemann-Liouville está ben definida. Ademais $I^\alpha f \in L_1(0, T)$ para calquera $T > 0$ e o operador

$$I^\alpha : L_1(0, T) \longrightarrow L_1(0, T)$$

e lineal e limitado, como vimos.

Ó igual que ocorre no caso enteiro, temos que

$$D^\alpha (I^\alpha f)(x) = f(x), \quad {}^C D^\alpha (I^\alpha f)(x) = f(x),$$

pero en xeral, $I^\alpha (D^\alpha f)$ e $I^\alpha ({}^C D^\alpha f)$ non son iguais a f .

En efecto, para $\alpha \in (0, 1)$ será $n = 1$, e así

$$\begin{aligned} I^\alpha({}^C D^\alpha f)(x) &= I^\alpha(I^{1-\alpha} D^1 f)(x) \\ &= I^\alpha(I^{1-\alpha} \hat{f}(x)), \quad \hat{f}(x) = D^1 f(x) \\ &= I^1 \hat{f}(x) \\ &= I^1(D^1 f)(x) \\ &= f(x) - f(0). \end{aligned}$$

Doutra banda, do lema 2.6, dedúcese:

$$I^\alpha(D^\alpha f)(x) = f(x) - \frac{D^{\alpha-1} f(0)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}.$$

Ademais, como vimos, segundo a derivada fraccionaria de Caputo, é válida a seguinte expresión:

$${}^C D^\alpha f(x) = D^\alpha(f(x) - f(0)).$$

O obxectivo desta sección céntrase no seguinte teorema. A súa proba require unha serie de resultados auxiliares, polo que de momento só enunciaremos:

Teorema 2.10. *Sexa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unha función non nula e T -periódica con $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Entón, $I^\alpha f$ non é T -periódica calquera que sexa $\alpha \in (0, 1)$.*

Supoñendo certo o teorema anterior, temos o seguinte corolario:

Corolario 2.11. *Sexa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unha función non nula e T -periódica con $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Entón, a derivada fraccionaria de Caputo ${}^C D^\alpha f$ non é T -periódica calquera que sexa $\alpha \in (0, 1)$.*

O mesmo resultado é válido para a derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, $D^\alpha f$.

Proba.

Supoñamos pola contra que ${}^C D^\alpha f$ é T -periódica. Entón, polo teorema previo $I^\alpha f$ non é T -periódica.

Sen embargo

$$I^\alpha({}^C D^\alpha f) = f(t) - f(0)$$

é T -periódica, por selo f .

Un razoamento similar é válido para a derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

Sen máis que supoñer que $D^\alpha f$ é T -periódica e considerando a función $\hat{f} = f - f(0)$, a cal é T -periódica, teríamos que

$${}^C D^\alpha \hat{f} = D^\alpha \hat{f}$$

e así poder obter de novo a mesma contradición. □

Os seguintes lemas son necesarios para a proba do teorema 2.10.

Lema 2.12. *Supoñamos que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ é T -periódica. Se $I^\alpha f$ é tamén T -periódica, entón:*

$$\int_0^T (nT - t)^{\alpha-1} f(t) dt = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Proba.

Se $n = 1$, por ser $I^\alpha f(T)$ T -periódica:

$$0 = I^\alpha f(0) = I^\alpha f(T) = \int_0^T (T - t)^{\alpha-1} f(t) dt.$$

Se $n = 2$, resulta:

$$\begin{aligned} 0 &= I^\alpha f(2T) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{2T} (2T - t)^{\alpha-1} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (2T - t)^{\alpha-1} f(t) dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_T^{2T} (2T - t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad (t = u + T) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (2T - t)^{\alpha-1} f(t) dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T - u)^{\alpha-1} f(u + T) du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (2T - t)^{\alpha-1} f(t) dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T - u)^{\alpha-1} f(u) du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (2T - t)^{\alpha-1} f(t) dt, \end{aligned}$$

onde a última igualdade é consecuencia do paso $n = 1$.

A proba séguese facendo indución sobre n .

Supoñamos que o resultado é certo para $n > 2$ isto é:

$$\int_0^T (nT - t)^{\alpha-1} f(t) dt = 0,$$

e verifiquémolo para $n + 1$.

Pois ben, da periodicidade de $I^\alpha f$ será

$$\begin{aligned} 0 &= I^\alpha f((n+1)T) = \int_0^{(n+1)T} ((n+1)T - t)^{\alpha-1} f(t) dt \\ &= \sum_{j=0}^n \int_{jT}^{(j+1)T} ((n+1)T - t)^{\alpha-1} f(t) dt, \end{aligned}$$

onde aplicamos a propiedade aditiva das integrais.

Doutra banda, para $j = 1, 2, \dots, n$, considerando o cambio de variable $t = u + jT$, temos que

$$\sum_{j=1}^n \int_{jT}^{(j+1)T} ((n+1)T - t)^{\alpha-1} f(t) dt = \sum_{j=1}^n \int_0^T ((n+1-j)T - u)^{\alpha-1} f(u) du = 0,$$

por hipóteses de indución, xa que $1 \leq n+1-j \leq n$.

Así pois

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=0}^n \int_{jT}^{(j+1)T} ((n+1)T - t)^{\alpha-1} f(t) dt \\ &= \int_0^T ((n+1)T - t)^{\alpha-1} f(t) dt + \sum_{j=1}^n \int_{jT}^{(j+1)T} ((n+1)T - t)^{\alpha-1} f(t) dt, \end{aligned}$$

de onde

$$\int_0^T ((n+1)T - t)^{\alpha-1} f(t) dt = 0,$$

co se que conclúe. □

Lema 2.13. *Nas condicións do lema 2.12,*

$$\int_0^T f(t) dt = 0 \tag{2}$$

Proba.

Sexan f^+ e f^- a parte positiva e negativa de f , isto é:

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f^-(x) = -\min(f(x), 0), \quad f = f^+ - f^-.$$

Da ecuación (1) do lema 2.12

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T (nT - t)^{\alpha-1} f(t) dt = \int_0^T (nT - t)^{\alpha-1} (f^+(t) - f^-(t)) dt \\ &= \int_0^T (nT - t)^{\alpha-1} f^+(t) dt - \int_0^T (nT - t)^{\alpha-1} f^-(t) dt, \end{aligned}$$

de onde

$$\int_0^T (nT - t)^{\alpha-1} f^+(t) dt = \int_0^T (nT - t)^{\alpha-1} f^-(t) dt.$$

Entón se $\int_0^T f^+(t) dt = 0$ ou $\int_0^T f^-(t) dt = 0$, de (1) séguese que $f = 0$.

Consideremos pois o caso

$$\int_0^T f^+(t) dt > \int_0^T f^-(t) dt > 0 \Rightarrow \frac{\int_0^T f^-(t) dt}{\int_0^T f^+(t) dt} < 1.$$

Así, para $n = 2, 3, \dots$, temos

$$\left(\frac{nT}{(n-1)T} \right)^{\alpha-1} > \frac{\int_0^T f^-(t)dt}{\int_0^T f^+(t)dt},$$

equivalentemente

$$(nT)^{\alpha-1} \int_0^T f^+(t)dt > ((n-1)T)^{\alpha-1} \int_0^T f^-(t)dt,$$

é dicir

$$(nT)^{\alpha-1} \int_0^T f^+(t)dt - ((n-1)T)^{\alpha-1} \int_0^T f^-(t)dt > 0.$$

Agora, como $nT > 0$ e $t \in [0, T]$, será $nT - t \leq nT$, e posto que $\alpha \in (0, 1)$ debe ser $\alpha - 1 < 0$, co cal:

$$\frac{1}{(nT - t)^{1-\alpha}} \geq \frac{1}{(nT)^{1-\alpha}}.$$

Doutra banda, nas mesmas condicións, temos

$$nT - T \leq nT - t \Rightarrow -(nT - T) \geq -(nT - t),$$

é dicir

$$-\frac{1}{((n-1)T)^{1-\alpha}} \leq -\frac{1}{(nT - t)^{1-\alpha}}.$$

Da ecuación (1), e do razoado previamente, séguese:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T (nT - t)^{\alpha-1} f(t)dt \\ &= \int_0^T (nT - t)^{\alpha-1} f^+(t)dt - \int_0^T (nT - t)^{\alpha-1} f^-(t)dt \\ &\geq (nT)^{\alpha-1} \int_0^T f^+(t)dt - ((n-1)T)^{\alpha-1} \int_0^T f^-(t)dt \\ &> 0, \end{aligned}$$

o que é absurdo.

O mesmo razoamento é válido para o caso

$$\int_0^T f^-(t)dt > \int_0^T f^+(t)dt > 0$$

chegando de novo a unha contradición.

Necesariamente

$$\int_0^T f^+(t)dt = \int_0^T f^-(t)dt > 0,$$

polo que

$$\int_0^T f(t)dt = 0.$$

□

Lema 2.14. *Nas condicións do lema 2.12,*

$$\int_0^T (T + \delta - t)^{\alpha-1} f(t)dt = 0, \quad \forall \delta \in [0, T]. \quad (3)$$

Proba.

Se $\delta = 0$ ou $\delta = T$, a ecuación (3) redúcese a

$$\int_0^T (T - t)^{\alpha-1} f(t)dt \quad \text{e} \quad \int_0^T (2T - t)^{\alpha-1} f(t)dt,$$

respectivamente, e en ambos casos, pola periodicidade de $I^\alpha f$ e o visto no lema 2.12, temos o desexado.

Supoñamos pois $0 < \delta < T$. Entón:

$$\begin{aligned}
 I^\alpha f(T + \delta) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T+\delta} (T + \delta - t)^{\alpha-1} f(t) dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T + \delta - t)^{\alpha-1} f(t) dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_T^{T+\delta} (T + \delta - t)^{\alpha-1} f(t) dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T + \delta - t)^{\alpha-1} f(t) dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\delta (\delta - u)^{\alpha-1} f(u) du, \quad (t = u + T) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T + \delta - t)^{\alpha-1} f(t) dt + I^\alpha f(\delta).
 \end{aligned}$$

Como por hipóteses $I^\alpha f$ é T -periódica, para $\delta \in (0, T)$ fixo, será

$$I^\alpha f(T + \delta) = I^\alpha f(\delta),$$

de onde

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T + \delta - t)^{\alpha-1} f(t) dt = 0.$$

□

Lema 2.15. *Nas condicións do lema 2.12,*

$$\int_0^T (T + r - t)^{\alpha-1} f(t) dt = 0, \quad \forall r \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Proba.

Se $r \in [0, T]$ ou $r = nT$, $n = 1, 2, \dots$, a ecuación (4) redúcese aos lemas anteriores 2.14 e 2.12, respectivamente, polo que neste caso non hai nada que ver.

Sexa $r = nT + \delta$, de xeito que $T + r = (n + 1)T + \delta$, $\delta \in [0, T]$. Entón, pola periodicidade de $I^\alpha f$ temos que:

$$I^\alpha f(\delta) = I^\alpha f(T + r) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{(n+1)T+\delta} ((n+1)T + \delta - t)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

e da propiedade aditiva das integrais o último membro da igualdade podemos escribilo como

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{(n+1)T+\delta} ((n+1)T + \delta - t)^{\alpha-1} f(t) dt &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n \int_{jT}^{(j+1)T} ((n+1)T + \delta - t)^{\alpha-1} f(t) dt \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{(n+1)T}^{(n+1)T+\delta} ((n+1)T + \delta - t)^{\alpha-1} f(t) dt.
 \end{aligned}$$

A continuación consideremos cada unha das integrais do lado dereita desta última igualdade por separado.

Nas integrais dependentes de j , consideremos o cambio de variable $t = u + jT$ e chamemos $t' = (n - j)T + \delta$, para obter

$$\begin{aligned}
 \int_{jT}^{(j+1)T} ((n+1)T + \delta - t)^{\alpha-1} f(t) dt &= \int_0^T (T + (n - j)T + \delta - u)^{\alpha-1} f(u + jT) du \\
 &= \int_0^T (T + t' - u)^{\alpha-1} f(u) du.
 \end{aligned}$$

Para a última integral, usamos o cambio de variable $t = u + (n + 1)T$ de xeito que

$$\begin{aligned}
 \int_{(n+1)T}^{(n+1)T+\delta} ((n+1)T + \delta - t)^{\alpha-1} f(t) dt &= \int_0^\delta (\delta - u)^{\alpha-1} f(u + (n+1)T) du \\
 &= \int_0^\delta (\delta - u)^{\alpha-1} f(u) du \\
 &= I^\alpha f(\delta).
 \end{aligned}$$

Así pois:

$$I^\alpha f(\delta) = \sum_{j=0}^n \int_0^T (T + t' - u)^{\alpha-1} f(u) du + I^\alpha f(\delta),$$

é dicir

$$\sum_{j=0}^n \int_0^T (T + t' - u)^{\alpha-1} f(u) du = \sum_{j=0}^n \int_0^T (T(n-j+1) + \delta - u)^{\alpha-1} f(u) du = 0.$$

A proba séguese facendo indución sobre n , ó igual que no lema 2.12. □

Lema 2.16. *Sexan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unha función continua e T -periódica con $T > 0$ e $0 < \alpha < 1$ fixo. Supoñamos que*

$$\int_0^T (T + r - t)^{\alpha-1} f(t) dt = 0, \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad \int_0^T f(t) dt = 0.$$

Entón $f \equiv 0$.

Proba.

Xa que $\int_0^T f(t) dt = 0$, entón $0 = \int_0^T f(t) dt = \int_0^T (f^+(t) - f^-(t)) dt$ e podemos definir

$$c = \int_0^T f^+(t) dt = \int_0^T f^-(t) dt > 0.$$

Se $c = 0$ daquela $f = 0$, pola continuidade de f .

Definamos

$$\phi(r) = \int_0^T (T + r - t)^{\alpha-1} f(t) dt.$$

Das hipóteses $\phi(r) = 0$ para calquera $r \in \mathbb{R}$. Entón para $0 \leq a \leq b \leq T$, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \phi(r) dr = \int_a^b \left(\int_0^T (T + r - t)^{\alpha-1} f(t) dt \right) dr \\ &= \int_0^T \left(\int_a^b (T + r - t)^{\alpha-1} dr \right) f(t) dt \\ &= \int_0^T \left(\frac{(T + b - t)^\alpha - (T + a - t)^\alpha}{\alpha} \right) dt, \end{aligned}$$

onde asumimos que $0 \leq a < b$, $t < T$. Polo tanto

$$\int_0^T [(T + b - t)^\alpha - (T + a - t)^\alpha] dt = 0,$$

o que implica que

$$\psi(r) = \int_0^T (T + r - t)^\alpha f(t) dt$$

é unha función constante.

Doutra banda, posto que

$$r^\alpha c - (T + r)^\alpha c \leq \psi(r) \leq (T + r)^\alpha c - r^\alpha c,$$

onde

$$c = \int_0^T f^+(t) dt = \int_0^T f^-(t) dt$$

e posto que $0 = \int_0^T f(t) dt = \int_0^T f^+(t) dt - \int_0^T f^-(t) dt$, e

$$\lim_{r \rightarrow \infty} ((T + r)^\alpha - r^\alpha) = 0$$

resulta

$$\int_0^T (T + r - t)^\alpha f(t) dt = 0, \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Sexa agora

$$\hat{f} = f \cdot \chi_{[0,T]}, \quad \hat{f}(r) = \begin{cases} f(r), & r \in [0, T] \\ 0, & r > T \end{cases}$$

Definindo

$$\varphi(r) = (T + r)^\alpha,$$

a convolución de φ e $\hat{f}$ virá dada por

$$\varphi * \hat{f}(r) = \int_0^\infty \varphi(r-t) \hat{f}(t) dt = \int_0^T (T+r-t)^\alpha f(t) dt = 0,$$

como vimos con anterioridade.

Como a transformada de Laplace dunha convolución é o produto das transformadas que a involucran, resulta

$$0 = \mathcal{L}[0] = \mathcal{L}[\varphi] \cdot \mathcal{L}[\hat{f}] = \mathcal{L}[\varphi * \hat{f}].$$

Pero

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\varphi(r)] &= \int_0^\infty e^{-p(T+r)} (T+r)^\alpha dr, \quad (t = T+r) \\ &= \int_T^\infty e^{-pt} t^\alpha dt, \quad (u = pt) \\ &= \int_{pT}^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{p}\right)^\alpha \frac{du}{p} \\ &= p^{-(1+\alpha)} \int_{pT}^\infty u^\alpha e^{-u} du \\ &= p^{-(1+\alpha)} \Gamma(1+\alpha, pT) \neq 0, \end{aligned}$$

logo debe ser $\mathcal{L}[\hat{f}] = 0$ de onde $\hat{f} = 0$, é dicir, $f = 0$ en $[0, T]$. □

Estamos en condicións de probar o teorema 2.10, que recordamos:

Teorema: Sexa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unha función non nula e T -periódica con $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Entón, $I^\alpha f$ non é T -periódica calquera que sexa $\alpha \in (0, 1)$.

Proba.

Sexa $\alpha \in (0, 1)$ e $T > 0$.

Supoñamos pola contra que $I^\alpha f$ é T -periódica, entón:

$$I^\alpha f(0) = 0 = I^\alpha f(T),$$

é dicir

$$0 = I^\alpha f(T) = \int_0^T (T-t)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

de onde $f = 0$, o que está en contradición cas hipóteses. □

2.5. A función de Mittag-Leffler.

Se algo merece ser recalcado pola súa importancia no cálculo fraccionario, estas non son outras que a familia de funcións de Mittag-Leffler. Como sabemos, as exponenciais preséntanse como solución natural nas ecuacións diferenciais ordinarias lineais, (EDOs), de feito forman un sistema fundamental de solucións.

Este papel cobra protagonismo, dun xeito análogo, a través das funcións de Mittag-Leffler no caso das ecuacións diferenciais fraccionarias, (EDFs). Esta función é unha xeneralización de moitas funcións coñecidas, e de feito, a propia exponencial, e^x , pode ser vista como un caso particular da familia Mittag-Leffler.

Debido á bibliografía empregada para a realización do traballo, nesta sección daremos o resultado máis xeral, é dicir, no corpo dos números complexos.

Definición 2.17. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, a función de Mittag-Leffler de dous parámetros, escrito $E_{\alpha, \beta}$, é a función complexa de variable complexa definida por:

$$E_{\alpha, \beta}(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad \operatorname{Re}(\beta) > 0.$$

É moi usual tomar $\beta = 1$, e así a anterior definición redúcese a:

$$E_{\alpha}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad \operatorname{Re}(\beta) > 0.$$

Como consecuencia destas definicións temos o seguinte teorema:

Teorema 2.18. *Son válidas as seguintes:*

- i) $E_{\alpha,\beta}(s) = sE_{\alpha,\alpha+\beta}(s) + \frac{1}{\Gamma(\beta)},$
- ii) $E_{\alpha,\beta}(s) = \beta E_{\alpha,\beta+1}(s) + \alpha s \frac{d}{ds} E_{\alpha,\beta+1}(s),$
- iii) $\left(\frac{d}{ds}\right)^m [s^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(s^{\alpha})] = s^{\beta-m-1} E_{\alpha,\beta-m}(s^{\alpha}), \quad \operatorname{Re}(\beta - m) > 0, \quad m = 0, 1, \dots$

Proba.

i) É consecuencia inmediata da definición 2.17, pois

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{s^{k+1}}{\Gamma(\alpha k + \beta + \alpha)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{\Gamma(\alpha k + (\alpha + \beta))} \\ &= sE_{\alpha,\alpha+\beta}(s) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}. \end{aligned}$$

ii) Partindo do lado dereito da igualdade, resulta:

$$\begin{aligned} \beta E_{\alpha,\beta+1}(s) + \alpha s \frac{d}{ds} E_{\alpha,\beta+1}(s) &= \beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{\Gamma(\alpha k + \beta + 1)} + \alpha s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k s^{k-1}}{\Gamma(\alpha k + \beta + 1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta + \alpha k) s^k}{\Gamma(\alpha k + \beta + 1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta + \alpha k) s^k}{(\beta + \alpha k) \Gamma(\alpha k + \beta)} \\ &= E_{\alpha,\beta}(s). \end{aligned}$$

iii) Partindo do lado esquerdo,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{ds}\right)^m [s^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(s^{\alpha})] &= \left(\frac{d}{ds}\right)^m \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{\alpha k + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{d}{ds}\right)^m \frac{s^{\alpha k + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{\alpha k + \beta - m - 1}}{\Gamma(\alpha k + \beta - m)} \\ &= s^{\beta-m-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \beta - m)} \\ &= s^{\beta-m-1} E_{\alpha,\beta-m}(s^{\alpha}), \end{aligned}$$

onde fixemos uso da Power Rule da derivada fraccionaria no caso particular en que $\alpha = m$.

□

Algúns casos particulares:

1.- A exponencial:

$$E_{1,1}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} = e^s.$$

2.- $E_{1,2}(s) = \frac{1}{s}(e^s - 1)$, pois

$$\begin{aligned} E_{1,2}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{\Gamma(k+2)} \\ &= \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \frac{1}{s}(e^s - 1). \end{aligned}$$

3.- $E_{1,3}(s) = \frac{e^s - s - 1}{s^2}$, pois

$$\begin{aligned} E_{1,3}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{\Gamma(k+3)} \\ &= \frac{1}{s^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{k+2}}{(k+2)!} \\ &= \frac{1}{s^2}(e^s - s - 1). \end{aligned}$$

En xeral:

$$E_{1,r}(s) = \frac{1}{s^{r-1}} \left(e^s - \sum_{k=0}^{r-2} \frac{s^k}{k!} \right), \quad r = 1, 2, \dots$$

4.- Suma dunha progresión xeométrica, ($|s| < 1$):

$$E_{0,1}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{\Gamma(1)} = 1 + s + s^2 + \dots = \frac{1}{1-s}$$

O seno e coseno hiperbólico tamén poden ser vistos como un caso particular da función de Mittag-Leffler:

5.- Coseno hiperbólico dunha raíz:

$$E_{2,1}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{\Gamma(2k+1)} = 1 + \frac{s}{2!} + \frac{s^2}{4!} + \dots = \cosh(\sqrt{s})$$

6.- Coseno hiperbólico:

$$E_{2,1}(s^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{2k}}{(2k)!} = \cosh(s).$$

7.- Seno hiperbólico:

$$E_{2,2}(s^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(s)}{s}$$

Como vimos na definición da función de Mittag-Leffler, esta é unha xeneralización da exponencial e^s , que pode ser vista como un caso particular da función de Mittag-Leffler.

Estamos interesados en obter a transformada de Laplace da función de Mittag-Leffler, e para tal fin, empregaremos a analogía entre ela e a función exponencial e^s . Para lograr o que nos propoñemos, primeiro obteremos a transformada de Laplace da función $t^k e^{at}$.

Os detalles plázanse na seguinte proposición:

Proposición 2.19. *Dados $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, cúmprese que para todo $t > 0$*

$$\mathcal{L}[t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(at^\alpha)] = \frac{k! p^{\alpha - \beta}}{(p^\alpha - a)^{k+1}}, \quad \operatorname{Re}(p) > |a|^{1/\alpha},$$

onde $E_{\alpha, \beta}^{(k)}(s)$ é a derivada k -ésima de $E_{\alpha, \beta}$ en s .

En consecuencia:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k! p^{\alpha - \beta}}{(p^\alpha - a)^{k+1}} \right] = t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(at^\alpha).$$

Proba.

Primeiramente, vexamos que para $|s| < 1$ verifícase que:

$$\int_0^\infty e^{-t} e^{\pm st} dt = \frac{1}{1 \mp s}. \quad (5)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-t} e^{st} dt &= \frac{1}{s-1} \int_0^\infty (s-1) e^{(s-1)t} dt = \\ &= \frac{1}{s-1} \left(e^{(s-1)t} \right) \Big|_0^\infty, \quad (|s| < 1) \\ &= \frac{1}{1-s}, \quad (|s| < 1) \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(\pm s)^k}{k!} \int_0^\infty e^{-t} t^k dt, \quad (k > 0) \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(\pm s)^k}{k!} \Gamma(k+1) = \sum_{k=0}^\infty (\pm s)^k \\ &= \frac{1}{1 \mp s}. \end{aligned}$$

Doutra banda, derivando k -veces con respecto a $\underline{s}$ a ambos lados da expresión (5), resulta:

$$\int_0^\infty e^{-t} t^k e^{\pm st} dt = \frac{k!}{(1-s)^{k+1}}, \quad |s| < 1,$$

e facendo un par de substitucións obvias, obtemos a transformada de Laplace ben coñecida da función $t^k e^{\pm at}$:

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^k e^{\pm at} dt = \frac{k!}{(p \mp a)^{k+1}}, \quad \operatorname{Re}(p) > |a|.$$

Consideremos agora a expresión da función de Mittag-Leffler de dous parámetros, e substituíndo a súa expresión na integral da riba, resulta:

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(st^\alpha) dt = \frac{1}{1-s}, \quad |s| < 1,$$

que derivando k -veces a ambos lados con respecto a $\underline{s}$, empregando un razoamento análogo ao anteriormente descrito, obtemos a transformada de Laplace da función $t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\pm st^\alpha)$:

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(at^\alpha) dt = \frac{k! p^{\alpha - \beta}}{(p^\alpha \mp a)^{k+1}}, \quad \operatorname{Re}(p) > |a|^{1/\alpha}.$$

□

As funcións de Mittag-Leffler xogan un papel moi importante na solución de ecuacións diferenciais fraccionarias.

Para a realización dos resultados amosados nesta sección apoiámonos en [8] da bibliografía.

Na seguinte táboa presentamos un breve resumo de pares de transformadas de Laplace coñecidas. Todas son consecuencia inmediata da proposición anterior e referirémonos a ela como táboa de Mittag-Leffler:

$\mathcal{L}[y(t)] = Y(p)$	$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)]$
$\frac{1}{p^\alpha - a}$	$t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)$
$\frac{p^\alpha}{p(p^\alpha + a)}$	$E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{1}{p^\alpha(p - a)}$	$t^\alpha E_{1,\alpha+1}(at)$
$\frac{p^{\alpha-\beta}}{p^\alpha - a}$	$t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$

Nesta táboa $\alpha, \beta > 0$ son arbitrarios e $a \in \mathbb{R}$.

Recensión matemática: Gösta Mittag-Leffler (1846-1927). Foi un matemático sueco. Fillo do director de escola John Olof Leffler e de Gustava Wilhelmina Mittag, a súa irmá foi a escritora Anne Charlotte Leffler. Os seus comezos académicos foron na universidade de Upsala, onde se matriculou en 1865 e posteriormente adquiriu o título de doutor en 1872. Foi profesor nesa universidade ese mesmo ano. Posteriormente logrou unha cátedra de matemáticas na Universidade de Helsinki e foi o primeiro profesor de matemáticas da Universidade de Estocolmo, da que foi reitor entre 1891 e 1892.

Ademais da súa faceta matemática, tamén destacou como home de negocios, pero o colapso económico de Europa acabou ca súa fortuna en 1922.

Foi membro da Real Academia das Ciencias de Suecia dende 1883, da Sociedade Finlandesa das Ciencias e as Letras dende 1878, da Real Sociedade Sueca das Ciencias en Upsala, da Real Sociedade Xeográfica Sueca en Lund dende 1906 e de aproximadamente 30 sociedades estranxeiras das que destacan a Royal Society de Londres (1896) e a Academia das Ciencias Francesa de París. Foi galardoado cos doutorados honorarios da Universidade de Oxford e doutras universidades.

O seu nome leva un teorema sobre a representación de funcións uniformes mediante series polinómicas e as funcións de Mittag-Leffler de especial transcendencia no cálculo fraccionario.

Fundou a revista *Acta Mathematica* (en 1882), parcialmente financiado pola fortuna da súa esposa Signe Lindfors, e un instituto dedicado o desenrolo da ensinanza da matemática.

Unha lenda urbana di que Alfred Nobel decidiu non establecer un Premio Nobel de Matemáticas por unha suposta rivalidade persoal con Mittag-Leffler, aínda que non base histórica algunha.

2.6. Aplicacións.

Os operadores de integración e derivación fraccionarios son unha xeneralización dos ordinarios, que para un orde natural, o desexado é recuperar o resultado no seu senso ordinario. Esta xeneralización fai perder propiedades básicas, como vimos, que non se dan no caso de orde fraccionario (ou arbitrario).

Nesta sección describiremos métodos para resolver unha ecuación diferencial fraccionaria, EDF, que a continuación presentamos, e despois trataremos de aplicalos a casos concretos.

Unha ecuación diferencial fraccionaria de orde $\alpha > 0$, escrito EDF, é unha expresión do tipo:

$$D^\alpha y(x) = f[x, y(x), D^{\alpha_1} y(x), D^{\alpha_2} y(x), \dots, D^{\alpha_{m-1}} y(x)],$$

onde $y(x)$ é unha función real con dominio real descoñecida, $f[x, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}]$ é unha función dada e D^{α_k} con $k = 1, 2, \dots, m-1$ son operadores de orde fraccionario que representan derivadas fraccionarias, (Riemann-Liouville, Caputo, ...), verificando $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{m-1}$ e $m \geq 2$.

Unha solución da EDF da definición previa e calquera función real $y(x)$ de variable real que verifique a igualdade anterior.

Falaremos de ecuación diferencial fraccionaria lineal de orde $\alpha > 0$ se nos atopamos ante unha expresión do tipo:

$$D^\alpha y(x) = a_0(x)y(x) + \sum_{k=1}^{m-1} a_k(x)D^{\alpha_k} y(x) + b(x),$$

onde $y(x)$ é unha función real con dominio real descoñecida, $a_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$) e $b(x)$ son funcións coñecidas e D^{α_k} con $k = 1, 2, \dots, m-1$ son operadores de orde fraccionario que representan derivadas fraccionarias, (Riemann-Liouville, Caputo, ...), verificando $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{m-1}$ e $m \geq 2$.

No caso en que as funcións $a_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$) e $b(x)$ sexan constantes, falaremos de EDF lineal de coeficientes constantes, e se $b(x) = 0$ diremos que é unha EDF lineal homoxénea.

Se usamos derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville e queremos atopar unha solución $y(x)$ da EDF

$$D^\alpha y(x) = f[x, y(x), D^{\alpha_1} y(x), D^{\alpha_2} y(x), \dots, D^{\alpha_{m-1}} y(x)],$$

suxeita ás n condicións iniciais

$$D^{\alpha-k} y(0) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

onde $n = [\alpha] + 1$ se $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $n = \alpha$ se $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, diremos que estamos ante un problema de tipo Cauchy para as derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville.

Doutra banda, se usamos derivadas fraccionarias de Caputo e queremos atopar unha solución $y(x)$ da EDF

$${}^C D^\alpha y(x) = f[x, y(x), {}^C D^{\alpha_1} y(x), {}^C D^{\alpha_2} y(x), \dots, {}^C D^{\alpha_{m-1}} y(x)],$$

suxeita ás n condicións iniciais

$${}^C D^k y(0) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

onde $n = [\alpha] + 1$, diremos que estamos ante un problema de tipo Cauchy para as derivadas fraccionarias de Caputo.

Por último, para $\alpha > 0$ e $(a, b) \subset \mathbb{R}$, defínese o espazo de funcións $L^\alpha(a, b)$ como:

$$L^\alpha(a, b) = \{f \in L_1(a, b) : D^\alpha f \in L_1(a, b)\}.$$

Dende un punto de vista do análises matemático, e de especial interese determinar cando existe solución deste tipo de problemas, e non menos importante saber se é única, aínda que na teoría fraccionaria isto non é tarefa doada.

As cuestións relativas a estes resultados de existencia e unicidades de problemas de tipo Cauchy pódense consultar en [1] da bibliografía, concretamente o capítulo 3.

A continuación describimos dous métodos de resolución dun problema de tipo Cauchy no senso fraccionario:

1.-Mediante a aplicación de operadores fraccionarios: Sexan $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha \in (1, 2]$, e consideremos o problema tipo Cauchy con derivadas fraccionarias de Caputo dado por:

$${}^C D^\alpha y(x) = f(x), \quad x > 0.$$

Como $1 < \alpha \leq 2$, debe ser $n = [\alpha] + 1 = 2$, e polo tanto son necesarias dúas condicións iniciais no límite inferior 0:

$$\begin{cases} y(0) = b_0, \\ y'(0) = b_1, \end{cases}$$

Tratamos de aplicar o operador integral fraccionario de Riemann-Liouville, I^α , a ambos lados da ecuación. Do lema 2.9, para o lado dereito temos:

$$\begin{aligned} I^\alpha {}^C D^\alpha y(x) &= y(x) - \sum_{k=0}^1 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= y(x) - y(0) - y'(0)x, \end{aligned}$$

e así a ecuación convértese en:

$$y(x) = c_0 + c_1 x + I^\alpha f(x),$$

sendo c_0 e c_1 constantes que dependerán das condicións iniciais.

Impoñendo ditas condicións, obtemos

$$b_0 = y(0) = c_0 + I^\alpha f(0),$$

de onde $b_0 = c_0$, pois $I^\alpha f(0) = 0$.

Doutra banda, como $\alpha \in (1, 2]$ tendo presente a lei de expoñente **14**), resulta:

$$y'(x) = c_1 + D(I^\alpha f(x)) = c_1 + D(I^{\alpha+1-1})f(x) = c_1 + I^{\alpha-1}f(x),$$

e daquela,

$$b_1 = y'(0) = c_1 + I^{\alpha-1}f(0) = c_1,$$

é dicir, $b_1 = c_1$.

Así, a solución da EDF é:

$$\begin{aligned} y(x) &= b_0 + b_1 x + I^\alpha f(x) \\ &= b_0 + b_1 x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt. \end{aligned}$$

Notar que cando $\alpha = 2$, a anterior redúcese a:

$$y(x) = b_0 + b_1 x + \int_0^x (x-t)f(t)dt,$$

que é a solución da ecuación diferencial no seu senso ordinario:

$$y''(x) = f(x),$$

cas mesmas condicións iniciais ás consideradas no problema tipo Cauchy fraccionario.

2.-Mediante a aplicación da transformada de Laplace: Este método é completamente análogo ó descrito na sección 1.5. Aplicarémolo a un caso concreto para dar senso as distintas transformadas de Laplace que estivemos calculando dos operadores de derivación fraccionaria de orde arbitraria.

Consideremos a ecuación diferencial de oscilación:

$$y''(x) = \lambda y(x) + f(x), \quad x > 0,$$

onde $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ que xeneralizaremos para valores de $\alpha \in (1, 2]$ dando lugar o seguinte problema de Cauchy con derivadas fraccionarias de Caputo:

$${}^C D^\alpha y(x) = \lambda y(x) + f(x), \quad x > 0.$$

Como $1 < \alpha \leq 2$, debe ser $n = 2$, e de aí que sexan necesarias dúas condición iniciais no límite inferior 0:

$$\begin{cases} y(0) = b_0, \\ y'(0) = b_1. \end{cases}$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos lados da ecuación:

$$\mathcal{L}[{}^C D^\alpha y(x)] = \lambda \mathcal{L}[y(x)] + \mathcal{L}[f(x)],$$

c como $n = 2$, da proposición 2.8 séguese:

$$p^\alpha Y(p) - p^{\alpha-1}y(0) - p^{\alpha-2}y'(0) = \lambda Y(p) + F(p),$$

onde $Y(p) = \mathcal{L}[y(x)]$ e $F(p) = \mathcal{L}[f(x)]$.

Introducindo as condicións iniciais e desdexando $Y(p)$ obtemos:

$$Y(p) = \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - \lambda} b_0 + \frac{p^{\alpha-2}}{p^\alpha - \lambda} b_1 + \frac{F(p)}{p^\alpha - \lambda}.$$

Finalmente aplicamos $\mathcal{L}^{-1}$ para obter $y(x)$, solución da EDF:

$$\begin{aligned} y(x) &= b_0 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - \lambda} \right] + b_1 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{p^{\alpha-2}}{p^\alpha - \lambda} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{F(p)}{p^\alpha - \lambda} \right] \\ &= b_0 E_{\alpha,1}(\lambda x^\alpha) + b_1 x E_{\alpha,2}(\lambda x^\alpha) + \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-t)^\alpha] f(t) dt, \end{aligned}$$

onde aplicamos de xeito recorrente a táboa de Mittag-Leffler e o feito de que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{F(p)}{p^\alpha - \lambda} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p^\alpha - \lambda} \cdot F(p) \right] \\ &= x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^\alpha) * f(x), \end{aligned}$$

argumento de convolución explicado na sección 1.4 do capítulo 1.

Motivación: Cabe preguntarse se realmente é útil un modelo fraccionario real ou que nova información pode aportarnos con respecto aos modelos ordinarios.

Todo corpo sometido a un movemento pode modelarse da corda ca segunda lei de Newton, que di que a aceleración dun obxecto é proporcional á forza resultante exercida sobre o obxecto.

Analiticamente:

$$\Sigma F = ma,$$

onde $\Sigma F = F_1 + F_2 + \dots + F_n$ son as forzas que interveñen sobre o corpo, m é a masa do corpo e $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ é a aceleración causada pola forza, sendo $x(t)$ a función que determina o movemento.

Trátase pois de resolver unha ecuación diferencial de segunda orde do tipo:

$$\Sigma F = mx''.$$

Na teoría fraccionaria algo tan importante como a segunda Lei de Newton pode ser considerada como un caso particular da expresión:

$$\Sigma F = mD^\alpha f(x),$$

onde $1,5 < \alpha \leq 2$ pode ser considerado como calquera número real.

É interesante observar, que por exemplo, cando $\alpha \rightarrow 2$, recupérase o resultado no seu senso clásico.

No senso ordinario a interpretación física dos operadores de derivación clásica é clara.

Sen embargo isto non atopa o seu homólogo no cálculo fraccionario:

¿ Que interpretación física merece unha condición inicial do tipo $\lim_{t \rightarrow 0} D^{0,3}(t) = a_0$?

A saber... .

Cabe recalcar, ademais, que os operadores de derivación de orde natural teñen un carácter **local**, é dicir, a existencia de derivada pode estar suxeita a un punto en cuestión, mentres que os de orde fraccionario teñen un carácter **non local**, incorporando ao modelo efectos de memoria e contribución de moitas escalas espaciais dun xeito natural, ó estar definidos mediante integrais.

Debido a gran cantidade de modelos físicos clásicos, sempre cabe unha interpretación baseada na teoría fraccionaria, e ver se cabe, os modelos clásicos coma un caso particular da teoría fraccionaria.

A teoría fraccionaria abre deste modo un amplo abanico de posibilidades, moitas aínda por descubrir, que nos permitirá abordar problema clásicos dende un punto de vista fraccionario.

Descrita esta motivación, propoñemos a continuación exemplos que ilustrarán o anteriormente dito, así como a teoría desenrolada ó longo deste traballo:

Exemplo 1: Pretendemos dar solución ó seguinte problema de tipo Cauchy para a derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, que plantamos:

$$\begin{cases} D^\alpha y(t) = ay(t), & a \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-\alpha} y(t) = c, & c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aplicamos o operador transformada de Laplace na EDF:

$$\mathcal{L}[D^\alpha y(t)] = a\mathcal{L}[y(t)].$$

Como $0 < \alpha \leq 1$ debe ser $n = 1$, e da transformada de Laplace da derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, temos que:

$$\mathcal{L}[D^\alpha y(t)] = p^\alpha Y(p) - D^{\alpha-1}y(0),$$

e daquela

$$p^\alpha Y(p) - D^{\alpha-1}y(0) = aY(p).$$

Supoñamos que $D^{\alpha-1}y(0)$ existe e que é igual a unha constante, que chamaremos c_1 .

Entón:

$$p^\alpha Y(p) - c_1 = aY(p),$$

equivalentemente

$$Y(p) = \frac{c_1}{p^\alpha - a}.$$

Consecuentemente

$$y(t) = c_1 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p^\alpha - a} \right],$$

e da táboa de Mittag-Leffler conclúese:

$$y(t) = c_1 t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha). \quad (6)$$

Falta determinar a constante c_1 .

Impoñendo a condición inicial,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-\alpha} y(t) = c_1 \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-\alpha} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha),$$

é dicir

$$\begin{aligned} c &= c_1 \lim_{t \rightarrow 0^+} E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha) = c_1 \lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha(k+1))} \\ &= c_1 \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{at}{\Gamma(2\alpha)} + \frac{at^{2\alpha}}{\Gamma(3\alpha)} + \dots \right) \\ &= \frac{c_1}{\Gamma(\alpha)}, \end{aligned}$$

de onde

$$c_1 = c\Gamma(\alpha).$$

Por último, facer notar que en (6), cando $\alpha \rightarrow 1$, recupérase a solución do problema de Cauchy no seu senso usual:

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t), & a \in \mathbb{R}, \\ y(0) = c, & c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pois pasando a límites (6):

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} y(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} c_1 t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha),$$

obtemos

$$y(t) = c_1 E_{1,1}(at) = c_1 e^{at},$$

e a constante c_1 determínase de novo impoñendo a condición inicial.

Exemplo 2 (Un modelo fraccionario para o péndulo simple):

O péndulo simple é un modelo físico que consta dunha partícula de masa m a cal está suxeita mediante un cable de lonxitude L a un punto fixo O , que pode oscilar nun plano fixo vertical polo efecto da forza da gravidade. A posición da partícula nun instante t especifícase mediante o ángulo θ que o cable forma ca vertical nese momento.

O estudo do péndulo simple constitúe un dos problemas clásicos en dinámica elemental.

Pretendemos dar un enfoque dende o punto de vista fraccionario, é dicir, xeneralizaremos a idea clásica de aceleración a unha derivada fraccionaria de Caputo de orde comprendido entre 1.5 e 2.

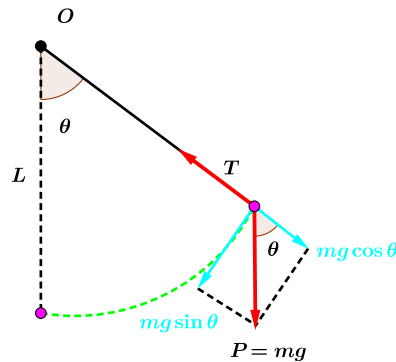
Como é costume nos modelos físicos, o péndulo simple é un modelo idealizado, é dicir, para a súa análise esíxense unha serie de hipóteses significativas:

- i) O cable polo que está suxeita a partícula carece de masa, é inextensible e sempre permanece ríxido.
- ii) O movemento ten lugar en dúas dimensións, é dicir, a partícula traza un arco de circunferencia.

iii) Suponse que a partícula non esta sometida a fricción algunha, como puidera ser a do aire.

Ecuación diferencial ordinaria de segunda orde: Ten como obxectivo describir o movemento da partícula en cada instante t , e terá por incógnita a función $\theta(t)$, que determinará en radiáns o ángulo do cable no instante t . O movemento realízase sobre un arco de circunferencia, e as forzas que actúan sobre a partícula son as seguintes: o seu propio peso $m \cdot g$, sendo g a forza da gravidade exercida pola Terra, e a tensión T , exercida polo cable. Descompoñendo o peso nas súas compoñentes normal e tanxencial, vemos que unha destas vese contrarrestada pola forza T que o cable exerce sobre a partícula, é dicir, unha é oposta da outra polo que se anulan mutuamente. Deste xeito, a única forza responsable do movemento será a compoñente tanxencial do peso, que terá signo negativo por ir sempre en dirección contraria ao movemento:

$$F(t) = -mg \sin(\theta(t)).$$



No modelo clásico, esta forza introdúcese segundo a segunda Lei de Newton:

$$F = ma,$$

onde a é a aceleración tanxencial do movemento, é dicir, a derivada segunda da posición $r(t)$. Como o movemento describe un arco de circunferencia, a relación entre o arco recorrido pola masa que colga do cable, a lonxitude L do cable e o ángulo do mesmo ca vertical ven dado por:

$$r(t) = L\theta(t) \Rightarrow a = \frac{d^2}{dt^2}r(t) = L\frac{d^2}{dt^2}\theta(t),$$

que substituíndo, obtemos

$$-mg \sin(\theta(t)) = mL \frac{d^2}{dt^2}\theta(t),$$

equivalentemente

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta(t) + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) = 0,$$

que é a ecuación diferencial ordinaria de segunda orde do péndulo simple.

O enfoque fraccionario: Consiste en substituír na segunda lei de Newton a aceleración a , por unha fórmula alternativa máis xeral, facendo uso da derivada fraccionaria segundo Caputo, para obter:

$$F(t) = m^C D^\alpha r(t), \quad 1,5 \leq \alpha \leq 2.$$

Razoando analogamente, como $r(t) = L\theta(t)$, será

$${}^C D^\alpha r(t) = L {}^C D^\alpha \theta(t),$$

logo

$$-mg \sin(\theta(t)) = m L {}^C D^\alpha \theta(t),$$

que nos leva a unha ecuación diferencial fraccionaria seguinte:

$${}^C D^\alpha \theta(t) + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) = 0, \quad 1,5 \leq \alpha \leq 2 \quad (\text{EDF})$$

Notar que como $1,5 \leq \alpha \leq 2$, debe ser $n = 2$, e da definición de derivada fraccionaria segundo Caputo, resulta:

$${}^C D^\alpha f(x) = I^{2-\alpha}(D^2 f(x)),$$

e daquela se $\alpha = 2$, esta redúcese a

$${}^C D^2 f(x) = D^2 f(x),$$

é dicir, recuperamos o modelo do péndulo simple no seu senso clásico.

Solución da EDF: O factor non lineal $\sin(\theta(t))$ dificulta a solución da EDF. Para aliviar esta dificultade fixémonos no desenrolo en serie do seno:

$$\sin(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots,$$

que para valores pequenos de θ ten cabida a aproximación:

$$\sin(\theta) \approx \theta,$$

que ven a significar que consideramos oscilacións do péndulo de pequena amplitude.

Deste xeito reducimos o problema á ecuación diferencial fraccionaria seguinte:

$${}^C D^\alpha \theta(t) + \frac{g}{L} \theta(t) = 0, \quad 1,5 \leq \alpha \leq 2,$$

suxeita as condicións iniciais seguintes: o ángulo de partida θ_0 e a velocidade angular inicial v_0 ,

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0, \\ \theta'(0) = v_0, \end{cases}$$

é dicir, estamos ante un problema de tipo Cauchy con derivadas fraccionarias de Caputo, que resolvemos aplicando o método da transformada de Laplace.

Entón, aplicamos o operador de Laplace a ambos lados:

$$\mathcal{L}[{}^C D^\alpha \theta(t)] + \frac{g}{L} \mathcal{L}[\theta(t)] = 0,$$

é dicir,

$$p^\alpha \Theta(p) - p^{\alpha-1} \theta(0) - p^{\alpha-2} \theta'(0) + \frac{g}{L} \Theta(t) = 0, \quad \Theta(t) = \mathcal{L}[\theta(t)],$$

que substituindo as condicións iniciais e despexando:

$$\Theta(t) = \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha + \frac{g}{L}} \theta_0 + \frac{p^{\alpha-2}}{p^\alpha + \frac{g}{L}} v_0.$$

Por último, aplicando o operador inverso de Laplace a ambos lados obtemos $\theta(t)$, solución da EDF:

$$\theta(t) = \theta_0 E_{\alpha,1} \left(-\frac{g}{L} t^\alpha \right) + v_0 t E_{\alpha,2} \left(-\frac{g}{L} t^\alpha \right).$$

E común supoñer que a partícula suxeita o cable parte do repouso, é dicir, $v_0 = 0$, e así a solución da EDF redúcese a:

$$\theta(t) = \theta_0 E_{\alpha,1} \left(-\frac{g}{L} t^\alpha \right).$$

Notar que cando $\alpha = 2$, tendo presente o desenrolo en serio do coseno, resulta:

$$\begin{aligned} E_{2,1} \left(-\frac{g}{L} t^2 \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{g}{L} t^2 \right)^k}{\Gamma(2k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t \right)^{2k} \\ &= \cos \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t \right). \end{aligned}$$

É dicir, obtemos a solución da ecuación diferencial ordinaria lineal de orde dous $\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) + \frac{g}{L} \theta(t) = 0$, cas condicións iniciais indicadas:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t \right).$$

Para a realización deste exemplo usouse a referencia [3] da bibliografía.

Exemplo 3 (Ecuación de Bagley-Torvik): Neste último exemplo imos tratar de describir o movemento dunha placa somerxida nun fluído newtoniano a través dunha ecuación diferencial fraccionaria. Isto foi orixinariamente formulado por R.L. Bagley e P.J. Torvik e para a descrición do mesmo baseámonos no libro de Podlubny, que ven sendo [6] da bibliografía.

Primeiramente imos ver que a tensión de cizallamento ou cortante, (aquela que fixado un plano actúa tanxente ó mesmo), en cada punto do fluído pode ser relacionada dun xeito natural en termos dunha derivada fraccionaria.

A ecuación que describe o movemento do fluído ven descrita por:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

sendo ρ a densidade do fluído, μ a viscosidade e $v(t, z)$ é a velocidade transversal, que é á vez función do tempo t e a distancia z do fluído á fronteira da placa.

Supoñemos tamén que o fluído está en estado de equilibrio ó comezo, isto é:

$$v(0, z) = 0, \quad -\infty < z < 0$$

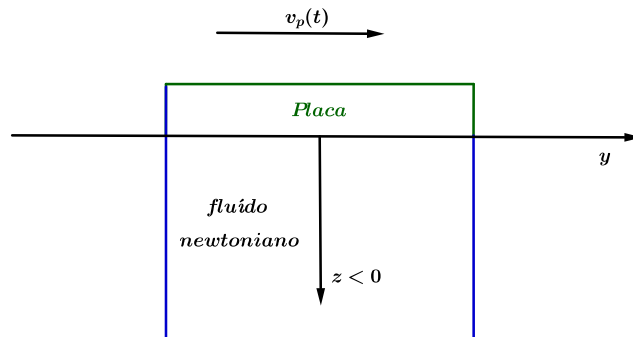
e que a influencia do movemento da placa esvaécese cando $z \rightarrow \infty$:

$$v(t, -\infty) = 0, \quad 0 < t < \infty.$$

A velocidade do fluído en $z = 0$ é igual á velocidade da placa:

$$v(t, 0) = v_p(t).$$

Graficamente:



En termos da transformada de Laplace, obtemos o seguinte problema de contorno:

$$\begin{cases} \rho s V(s, z) = \mu \frac{d^2 V(s, z)}{dz^2} \\ V(s, 0) = V_p(s), \\ V(s, -\infty) = 0, \end{cases}$$

onde s denota o parámetro da transformada de Laplace, $V_p(s) = \mathcal{L}[v_p(t)]$ e $V(s, z) = \mathcal{L}[v(t, z)]$.

É doado comprobar que

$$V(s, z) = V_p(s) \exp \left(z \sqrt{\frac{\rho s}{\mu}} \right).$$

é solución do anterior problema de contorno.

Derivando a anterior ecuación con respecto a z , resulta:

$$\frac{dV(s, z)}{dz} = \sqrt{\frac{\rho s}{\mu}} V_p(s) \exp \left(z \sqrt{\frac{\rho s}{\mu}} \right) = \sqrt{\frac{\rho s}{\mu}} V(s, z).$$

Coñecendo a velocidade $v(t, z)$ no fluído, é posible obter a tensión de cizallamento, $\sigma(t, z)$, dada por:

$$\sigma(t, z) = \mu \frac{\partial v(t, z)}{\partial z}, \quad (7)$$

e que en termos da transformada de Laplace adopta a forma:

$$\hat{\sigma}(s, z) = \mu \frac{dV(s, z)}{dz} = \sqrt{\mu \rho s} V(s, z) \quad (8)$$

onde $\hat{\sigma}(s, z) = \mathcal{L}[\sigma(t, z)]$.

Notar que o lado dereito da igualdade (8) coincide coa transformada de Laplace da derivada fraccionaria segundo Caputo seguinte:

$$\mathcal{L}[\sqrt{\mu \rho} {}^C D^{1/2} v(t, z)] = \sqrt{\mu \rho s} V(s, z),$$

é dicir

$$\hat{\sigma}(s, z) = \mathcal{L}[\sqrt{\mu \rho} {}^C D^{1/2} v(t, z)].$$

Finalmente, aplicando o operador inverso de Laplace, podemos escribir a tensión cortante ou de cizallamento en termos dunha derivada de orde fraccionaria:

$$\sigma(t, z) = \sqrt{\mu \rho} {}^C D^{1/2} v(t, z), \quad (9)$$

que era o que pretendíamos ver.

Podlubny en [6] advirte que a relación (9) non é a constitutiva para un fluído newtoniano, a relación constitutiva é a dada por (7).

Sen embargo, a ecuación (9) describe a relación entre a tensión e a velocidade para unha xeometría particular considerada (un fluído de dominio semi-infinito) e a carga (velocidade na fronteira da superficie).

Este exemplo aborda como vemos un sistema físico real no que a derivada de orde fraccionario aparece dun xeito natural, e polo tanto, pon de manifesto que existen modelos físicos os cales poden ser modelados mediante a teoría fraccionaria.

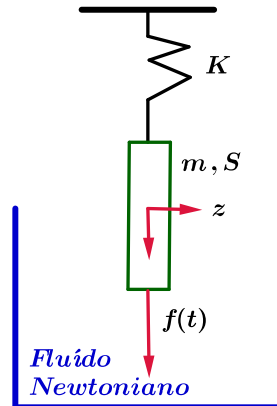
A interpretación física de (9) radica no feito de que a tensión ou stres nun punto dado en calquera momento depende da velocidade tanxencial do fluído nese punto.

Descritos estes conceptos, tratamos agora de deducir a ecuación de Bagley-Torvik.

Para ilo consideremos unha placa metálica ríxida de masa m e área S somerxida nun fluído newtoniano a cal esta suxeito polo seu extremo superior por un resorte con constante de rixidez K que a súa vez está suxeito a un punto fixo. Tal placa está sometida a unha forza $f(t)$ no extremo oposto á suxeición do resorte.

Como é costume nos modelos físicos trátase dun modelo ideal, é dicir, o resorte non interfere no fluído e a área da placa é o suficientemente grande como para producir no fluído adxacente á placa á velocidade e a tensión ou stres resultante dados pola relación (9). Ademais, supoñeremos que o sistema inicialmente está en equilibrio, é dicir, consideraremos condicións iniciais homoxéneas.

Graficamente:



Entrando en cuestión, calquera corpo sometido a un movemento pode modelarse facendo uso da segunda lei de Newton. Así, sumando as forzas que interveñen no movemento da placa, nas que aparte da forza $f(t)$ son protagonistas o principio de Arquímedes e a lei de Hooke, resulta que o desprazamento y da placa ven descrito pola ecuación:

$$my''(t) = f(t) - Ky(t) - 2S\sigma(t, 0). \quad (10)$$

Substituíndo na anterior expresión a tensión cortante pola relación dada en (9) e tendo en conta que:

$$v_p(t, 0) = y'(t),$$

(10) realmente é:

$$Ay''(t) + B {}^C D^{1/2} y'(t) + \hat{C}y(t) = f(t), \quad t > 0.$$

É un sinxelo exercicio ver que ${}^C D^{1/2} y'(t) = {}^C D^{3/2} y(t)$, e así a ecuación anterior adopta a forma:

$$Ay''(t) + B {}^C D^{3/2} y(t) + \hat{C}y(t) = f(t), \quad t > 0$$

suxeita as condicións iniciais:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

onde $A = m$, $B = 2S\sqrt{\mu\rho}$, $\hat{C} = K$, ${}^C D^{3/2}$ e a derivada fraccionaria segundo Caputo de orde $\alpha = \frac{3}{2}$, e μ , ρ son a viscosidade e densidade do fluído, respectivamente.

Esta ecuación fai uso da derivada fraccionaria de Caputo de orde $\alpha = \frac{3}{2}$ para describir o movemento dun sistema físico real, unha placa de masa m somerxida nun fluído newtoniano (fluído viscoso).

O movemento dunha placa ríxida de masa m e área S , a cal está suxeita a un resorte con constante de rixidez K , somerxida nun fluído newtoniano, como dixemos, foi orixinalmente proposta por Bagley-Torvik.

Capítulo 3

Aspectos relevantes do cálculo fraccionario.

3.1. Relación ca distribución dos números primos.

Nesta sección trataremos de poñer de manifesto a relación entre o cálculo fraccionario, a función zeta de Riemann e os números primos, e polo tanto ca **Hipóteses de Riemann**.

Para a descrición principal, relativa ó modelo de difusión fraccionario, baseámonos en [9] da memoria bibliográfica.

Na teoría de números o método de Riemann, baseado na teoría da función zeta, e a teoría dos números primos son dous métodos clásicos que gardan relación co comportamento asintótico da distribución dos números primos.

O teorema dos números primos foi conxecturado por Gauss e Legendre a finais do século XVIII, pero non foi ata 1896 cando Hadamard e De la Vallée-Poussin ofreceron, de forma independente, a primeira demostración.

Este teorema, concretamente afirma que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1,$$

onde $\pi(x)$ é a cantidade de números primos que non exceden x , isto é:

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

Na actualidade coñécense demostracións máis cortas e tamén máis elementais ca de Hadamard e De la Vallée-Poussin. Poderíamos destacar a ofrecida por Paul Erdős e Atle Selberg en 1949, os que prescindiron da teoría de funcións complexas e das propiedades da función zeta de Riemann, (vital nas demostracións anteriores), empregaron argumentos dunha natureza elemental.

Nesta sección amosaremos como unha ecuación diferencial fraccionaria pretende describir o comportamento da distribución dos números primos.

Neste artigo, unha ecuación diferencial fraccionaria, chamada de **sub-difusión**, é proposta para describir a distribución dos números primos, e comparan os resultados obtidos cos dous anteriormente mencionados, o de Riemann e a teoría dos números primos. Para comprobar a efectividade do modelo empregan o coñecido método da **entropía de Shannon**.

Motivación: Os números primos teñen moitos comportamentos e propiedades interesantes, e os problemas relacionados cos mesmos atraeron a curiosidade de moitos.

Poderíamos citar a **conxectura de Goldbach**:

Todo número par maior ca dous pode expresarse como suma de dous primos.

Tal conxectura foi considerada por Hardy o problema máis importante do século XX.

Tamén mención aparte merece a propia **Hipóteses de Riemann**. Esta hipóteses é equivalente á afirmación de que os números primos distribúense asintoticamente tan “armoniosamente” como sexa posible, máis precisamente, se a **Hipóteses de Riemann** é certa, o termo do erro do teorema dos números primos dado na seguinte forma equivalente:

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln(x)} (1 + o(1)),$$

onde $o(1) \rightarrow 0$ cando $x \rightarrow \infty$, é o mellor posible.

En palabras de Michel L. Lapidus, no seu libro “In search of the Riemann zeros,” podería dicirse que o resultado máis belo e útil obtido por Riemann é a chamada “fórmula explícita”:

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O(x^{\frac{1}{2}+\delta}), \quad \text{cando } x \rightarrow \infty,$$

para cada $\delta > 0$ e onde $\text{Li}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\ln t} dt + \int_{1-\varepsilon}^\infty \frac{1}{\ln t} dt \right)$.

A anterior ecuación expresa unha relación profunda entre os números primos e os ceros non triviais da función zeta.

Na opinión de Michel L. Lapidus, a importancia da **Hipóteses de Riemann** non radica unicamente na increíble multiplicidade das súas formas equivalentes, senón tamén no mensaxe críptico que leva consigo: *un acerca da xeometría dunha paisaxe ata o de agora inaccesibles para nós, a paisaxe subxacente aos números primos, e polo tanto os números enteiros. Unha vez atopemos a pistas necesarias para descifrar tal mensaxe, deberíamos ser capaces de descubrir e unificar grandes áreas das matemáticas, a mentira na confluencia da aritmética e a xeometría.*

A frecuencia de aparición dos números primos entre os números naturais segue a ser un misterio. Por exemplo, as sucesións $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$ describen a distribución dos números pares e impares, respectivamente. Isto non ten analoxía algunha ca distribución dos números primos, é dicir, non é posible formular unha sucesión que describa a súa distribución dunha forma tan precisa.

Facendo uso da función de contar números primos, $\pi(x)$, podemos observar que nos 10 primeiros números naturais hai 4 números primos, nos 100 primeiros naturais hai 25, e en xeral, a súa distribución emprica segue un “lei de potencia”, aparentemente non suxeita a ningunha regra natural. A distancia entre dous números primos próximos tamén aumenta conforme o número natural aumenta. Historicamente, foi un tema candente o tratar de describir unha lei de distribución dos números primos. Dende entón varios foron os modelos propostos, sendo a teoría dos números primos e o método de Riemann os máis coñecidos. A teoría dos números primos é unha descrición simple, pero non precisa, mentres que o método de Riemann é moito máis sofisticado e preciso. Ámbolos dous manexan a distribución dos números primos coma un problema de matemática pura e carecen dunha clara interpretación física e, en particular, non están involucrados ca ecuación da física matemática.

O decaemento da lei de potencia, especialmente observado na distribución de números primos, é tamén un fenómeno universal nos sistemas dinámicos, na química, na mecánica e física, entre outros, e coñécese como **difusión anómala**. A difusión anómala divídese xeralmente en dúas categorías: **sub-difusión** e **super-difusión**, que existen en moi diversos campos: hidroxía, bioloxía, materiais brandos viscoelásticos, turbulencia e vibración, por mencionar algúns. Nas últimas décadas, as ecuacións diferenciais fraccionarias atoparon a súa razón de ser ó describir de forma precisa en concisa certos fenómenos físicos, sendo un deles a difusión anómala nun sistema complexo.

A ecuación diferencial fraccionaria de sub-difusión: Neste contexto, no estudo dos números primos, a súa distribución é considerada como un paseo aleatorio nun sistema dinámico dun proceso de sub-difusión, máis precisamente, a súa formalización matemática segue unha distribución resultante de facer varios pasos aleatorios. Obviamente isto está en concordancia ca distribución dos números primos, onde o seguinte número primo non depende da posición do anterior.

Un proceso de difusión dise de sub-difusión cando a varianza, $\langle x^2 \rangle$, dos incrementos do desprazamento seguen unha lei de potencias da forma:

$$\langle x^2 \rangle t^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Este modelo de sub-difusión, a diferenza dos anteriores, ten unha interpretación física clara, e inclúe dous parámetro, o coeficiente de difusión A e o índice arbitrario α , que representan o mesmo parámetro físico como un índice estadístico na lei de potencias da varianza do desprazamento mencionado con anterioridade.

Na distribución dos números primos preséntase a densidade da descomposición dos mesmo a medida que o número natural considerado é maior e o seu comportamento asemella a un proceso de difusión, no senso físico.

En [9] da referencia bibliográfica consideran a distribución dos números primos como un proceso de difusión, e propoñen a **ecuación diferencial fraccionaria de sub-difusión** como posible descrición do seu comportamento:

$$\frac{d^\alpha f(r)}{dr^\alpha} + Af(r) = 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1)$$

onde $f(r)$ representa a densidade dos números primos que non exceden certo número natural N , $r = [\log(N)]^{\frac{1}{\alpha}}$ e $\frac{d^\alpha f(r)}{dr^\alpha}$ é a derivada no senso de Caputo seguinte:

$$\frac{d^\alpha u(r)}{dr^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{u'(\tau)}{(r-\tau)^\alpha} d\tau, \quad 0 < \alpha < 1.$$

A solución analítica de (1) ven dada por:

$$f(r) = E_\alpha(-Ar^\alpha), \quad (2)$$

onde $r = [\log(N)]^{\frac{1}{\alpha}}$ e E_α é a función de Mittag-Leffler, xa coñecida, dada por:

$$E_\alpha(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

A partir de (2), é posible obter a función de distribución acumulada da función Mittag-Leffler, cuxa expresión adopta a forma:

$$F(r) = 1 - E_{\alpha}(-Ar^{\alpha}).$$

As funcións de densidade e distribución acumulada da probabilidade da función de Mittag-Leffler son, respectivamente:

$$f(r) = \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\sigma\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha} \exp\left(\frac{-rx}{\sigma}\right)}{x^{2\alpha} + 1 + 2x^{\alpha} \cos(\pi\alpha)} dx,$$

e

$$F(r) = 1 - \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} \exp\left(\frac{-rx}{\sigma}\right)}{x^{2\alpha} + 1 + 2x^{\alpha} \cos(\pi\alpha)} dx.$$

Nestas expresións anteriores, pode observarse que o índice fraccionario $\alpha \in (0, 1]$ relativa á derivada fraccionaria é tamén o índice de estabilidade da distribución da función de Mittag-Leffler, e o coeficiente de difusión proposto na ecuación diferencial fraccionaria correspóndese co coeficiente $\sigma \in (0, \infty)$.

A cola da distribución da función de Mittag-Leffler é dada pola función:

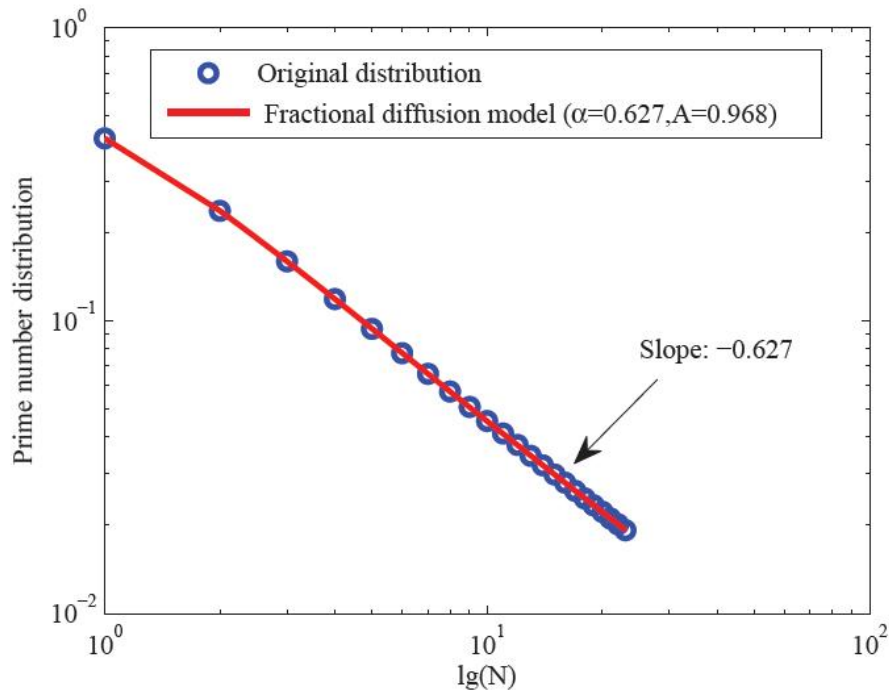
$$T(r) = 1 - F(r) = \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} \exp\left(\frac{-rx}{\sigma}\right)}{x^{2\alpha} + 1 + 2x^{\alpha} \cos(\pi\alpha)} dx.$$

Considerando a distribución dos números primos como un sistema aleatorio, en [9] propoñen usar a entropía para medir a incerteza da distribución dos números primos, concretamente a entropía de Shannon dunha variable aleatoria discreta, que é a definida como:

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n P(X_i) \log_b P(X_i),$$

onde P é a probabilidade de X_i , n é a lonxitude da mostra considerada e b fai mención á base do logaritmo.

Na sección de resultados amosan como o modelo de difusión fraccionario garda concordancia ca distribución orixinal dos números primos. A impresión visual realízana a través da seguinte gráfica:



Na seguinte táboa faise unha avaliación dos tres modelos facendo uso da entropía de Shannon:

Modelo	Teoría de Numeros	Método de Riemann	Modelo de Difusión fraccionaria	Orixinal
Entropía	3.4853	3.6074	3.5867	3.6135

3.2. Ecuacións reacción-difusión da física-matemática.

As ecuacións diferenciais fraccionarias son xeneralizacións das ecuacións diferenciais ordinarias a unha orde non enteira arbitraria. Estas, as EDF's, espertaron un gran interese debido a súa facilidade para modelar fenómenos físicos complexos, como vimos na ecuación de Bagley-Torvik por exemplo. En xeral estas ecuacións recollen efectos **non locais** incorporando á modelaxe efectos de memoria e contribución de moitas escalas espaciais dun xeito natural.

Algunhas ecuacións diferenciais fraccionarias aplicáronse con éxito na descrición de certos problemas de enxeñería e física. Na sección anterior puidemos ser testemuñas deste feito no caso particular da ecuacións diferencial fraccionaria de sub-difusión, a través da cal, pretendíase conseguir unha descrición acerca da distribución asíntótica dos números primos, mellorando os resultados da teoría de números clásica.

En [10] destacan a importancia que adquiriron nos últimos anos as ecuacións diferenciais de tempo, espazo, tempo-espazo e de reacción-difusión.

Moitas das solucións analíticas destas ecuacións foron publicadas na literatura matemática. A importancia das mesmas, radica en que ofrecen unha descrición e comprensión de fenómenos de dispersión, como por exemplo un fenómeno contaminante, permitindo que poidan examinarse dun xeito máis sinxelo a concentración de contaminantes. Ademais, os modelos fraccionarios facilitan o estudo do comportamento asíntótico das solucións, que en xeral, son difíciles de obter a través de cálculos numéricos.

Concretamente en [10] publican as solucións analíticas de tempo-espazo de ecuacións diferenciais fraccionarias de reacción-difusión multi-termo, (MT-TS-FRDEs), definidas sobre un dominio infinito.

Os autores destacan que a importancia dos resultados amosados radica no feito de que numerosos resultados en reacción e difusión fraccionaria, problemas de onda fraccionaria, e outros, pódense derivar como casos especiais dos resultados obtidos no artigo.

A ecuación diferencial fraccionaria de reacción-difusión multi-termo: Adopta a seguinte forma:

$$P(D_t^*)u(x, t) = \nu^2 {}_{-\infty}D_x^\gamma u(x, t) + \xi^2 u(x, t) + f(x, t), \quad (3)$$

definida sobre un dominio infinito, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Aquí, x e t son as variable espaciais e temporais, respectivamente, f é unha función non lineal e ν^2 é o coeficiente de difusión.

Suponse tamén que:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = 0.$$

O operador $P(D_t^*)u(x, t)$ defínese como:

$$P(D_t^*)u(x, t) = \left(D_t^\alpha + \sum_{i=1}^p a_i D_t^{\alpha_i} \right) u(x, t), \quad 0 \leq \alpha_p < \dots < \alpha_1 < \alpha \leq 2,$$

sendo $D_t^{\alpha_i}$ a derivada fraccionaria de Caputo de orde α_i , con respecto a t , definida no seguinte xeito:

$$D_t^{\alpha_i} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha_i)} \int_0^t (t - \tau)^{m - \alpha_i - 1} f^{(m)}(\tau) d\tau, \quad m - 1 < \alpha_i \leq m, \quad m \in \mathbb{N},$$

e ${}_{-\infty}D_x^\gamma$ denota o operador fraccionario de Weyl de orde γ con respecto a x definido como segue:

$${}_{-\infty}D_x^\gamma f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \gamma)} \frac{d^n}{dx^n} \int_{-\infty}^x (x - \tau)^{n - \gamma - 1} f(\tau) d\tau, \quad n - 1 < \alpha_i \leq n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Para obter a solución analítica deste tipo de ecuacións usan técnicas similares aos descritos neste traballo, mediante a aplicación de transformada integrais, ca salvidade que ademais do método de Laplace, en [10], tamén introducen a transformada de Fourier, que aplicada conxuntamente ca anterior permite conseguir o obxectivo: **a solución analítica**.

Moitas das cuestión técnicas, (lemas, definicións e demais), foron tamén xa incluídas ó longo deste traballo, polo que se alguén consulta a referencia indicada notará que estará familiarizado con tales resultados, (aínda que advírtese que os recursos de empregados en [10] superan con creces a ferramenta empregada neste TFM).

Deste modo obteñen a solución analítica distinguindo entre os seguintes casos:

- 1) $0 \leq \alpha_s < \dots < \alpha_1 < \alpha \leq 1$.
- 2) $1 \leq \alpha_s < \dots < \alpha_1 < \alpha \leq 2$.
- 3) $0 \leq \alpha_s < \dots < \alpha_{h_0-1} \leq 1 < \alpha_{h_0} < \dots < \alpha_1 < \alpha \leq 2$.

No primeiro dos casos, en 1), o problema a estudar redúcese a:

$$\begin{cases} P(D_t^*)u(x, t) = (D_t^\alpha + \sum_{i=1}^p a_i D_t^{\alpha_i}) u(x, t), \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases}$$

e obteñen, usando as técnicas de transformadas descritas, a seguinte solución analítica:

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{k_1+k_2+\dots+k_p=m} (m; k_1, k_2, \dots, k_p) \right. \\
& \times \prod_{i=2}^p b^{k_1} a_i^{k_i} t^{(\alpha-\alpha_1)m+q} E_{\alpha-\alpha_1, q+1}^{(m)}(-a_1 t^{\alpha-\alpha_1}) \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{k_1+k_2+\dots+k_p=m} (m; k_1, k_2, \dots, k_p) \prod_{i=2}^p b^{k_1} a_i^{k_i} \\
& \times \sum_{n=1}^p a_n t^{(\alpha-\alpha_1)m+\alpha-\alpha_n+q} E_{\alpha-\alpha_1, \alpha-\alpha_n+q+1}^{(m)}(-a_1 t^{\alpha-\alpha_1}) \Big) \Phi(\omega) d\omega \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{k_1+k_2+\dots+k_p=m} (m; k_1, k_2, \dots, k_p) \right. \\
& \times \prod_{i=2}^p b^{k_1} a_i^{k_i} \int_0^t \tau^{(\alpha-\alpha_1)m+\alpha+q-1} E_{\alpha-\alpha_1, \alpha+q}^{(m)}(-a_1 \tau^{\alpha-\alpha_1}) \\
& \times F(\omega, t-\tau) d\tau \Big) d\omega,
\end{aligned}$$

onde $E_{\alpha, \beta}^{(m)}$ denota a derivada m -ésima da función de Mittag-Leffler de dous parámetros e $q = k_1\alpha_1 + \sum_{j=2}^p k_j(\alpha_1 - \alpha_j)$.

Observar que as funcións de **Mittag-Leffler** aparecen como protagonistas na devandita solución, permitindo un forma elegante e compacta da mesma.

En [10], tamén obteñen as respectivas solucións analíticas dos casos 2) e 3), e expoñen exemplos concretos de aplicación directa en cada un dos tres casos.

Neste último capítulo o noso obxectivo era simplemente recalcar un par de aplicacións que puxeran de manifesto a importancia e necesidade do **cálculo fraccionario**. Cremos que en ambos casos isto conséguese con creces. No primeiro deles fomos testemuñas de como a partir dunha ecuación fraccionaria obtivéronse resultados relativos a distribución dos números primos que melloran incluso a teoría de números clásica.

No segundo, nos tempos que corren, o efecto invernadoiro é hoxe en día unha preocupación a nivel mundial. A modelaxe de determinados fenómenos contaminantes mediante modelos fraccionarios permite facer un estudo máis sinxelo e preciso sobre a concentración de contaminantes, caso particular dos fenómenos de dispersión.

Bibliografía

- [1] A.A,Kilbas, H.M.,Srivastava, J.J.,Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*. Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [2] A. Karatsuba, *Basic Analytic Number Theory*. Springer-Verlag, 1983.
- [3] A. Lombardero Ozores, *Cálculo fraccionario y dinámica newtoniana*. Revista de investigación: “Pensamiento matemático”, Número 1, Volumen IV, Abril 2014.
- [4] G.F,Simmons, S.G,Krantz, *Ecuaciones diferenciales: Teoría, técnica y práctica*. McGraw-Hill, 2007.
- [5] I. Area, J. Losada, J.J. Nieto, *On Fractional Derivatives and Primitives of Periodic Functions*. Abstract and Applied Analysis, ID 392598, Volumen 2014.
- [6] I. Podlubny, *Fractional Differential equations*. Academic Press, 1999.
- [7] J. Mateos Palacio, J.A. Otero Cortes, R. Ríos Fernández, P.M. Suárez Rodríguez, *Cálculo operacional: La transformada de Laplace*. Servicio de publicaciones de la Universidad de Oviedo, 1992.
- [8] S.G. Samko, A.A, Kilbas, O.I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives: Theory and applications*. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [9] Wen Chen, Yingjie Liang, Shuai Hu, Hongguang Sun, *Fractional derivative anomalous diffusion equation modeling prime number distribution*. Fractional Calculus and Applied Analysis, Volume 18, Number 3 (2015).
- [10] Xiao-Li Ding, Juan J. Nieto, *Analytical solutions for the multi-term time-space fractional reaction-diffusion equations on an infinite domain*. Fractional Calculus and Applied Analysis, Volume 18, Number 3 (2015).
Recursos na rede:
- [11] <https://www.biografiasyvidas.com>
- [12] <https://www.wolframalpha.com>