Proposición: $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Solución:

Se suele hacer por reducción al absurdo. Por lo general consiste en suponer lo contrario a lo que se propone (en este caso que es un número irracional), y usando esta tesitura intentar llegar a una contradicción. Y si suponiendo lo contrario de lo que se afirma se obtiene una contradicción, entonces sería un absurdo no pensar que efectivamente es un número irracional.

Se empieza suponiendo que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, es decir, de la forma $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, donde $\dfrac{p}{q}$ es una fracción irreducible (que no se puede simplificar más; si no lo fuese siempre se podría reducir a una simplificando la fracción). Si $\dfrac{p}{q}$ es una fracción irreducible, entonces esto significa que m.c.d(p, q)=1 (condición de fracción irreducible). Además, llega con suponer que $p, q \in \mathbb{Z}^+$, con $q \neq 0$, pues la aplicación $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^-$ definida por $f(n) = -n$ es biyectiva.

Pues bien, se tiene:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Leftrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$$

Como $q \in \mathbb{Z}^+$, será $q^2 \in \mathbb{N}$ y, por tanto, $2q^2$ es claramente un número par. De aquí se sigue que p^2 es un número par, consecuencia directa de la igualdad $p^2 = 2q^2$.

Hagamos ahora un inciso. Notar que si $p \in \mathbb{N}$ es par, entonces su cuadrado p^2 también, pues $p^2 = p \cdot p$. Se puede comprobar a través de un simple experimento numérico: 2 es par y $2^2 = 4$ es par; 4 es par y $4^2 = 16$ es par, etc.). Lo mismo sucede para los impares: el cuadrado de un impar es impar. Y como p^2 es par, p debe ser un par del que procede. Esto es, de la forma $p = 2k$, con $k = 1, 2, 3 \ldots$

Por tanto, si $p = 2k$, de $p^2 = 2q^2$ ha de ser $(2k)^2 = 2q^2$, es decir, $4k^2 = 2q^2$, es decir, $2k^2 = q^2$, y así q^2 es un número par, pues $2k^2$ es un número par. Por lo razonado con anterioridad se sigue que q es un número par, porque su cuadrado es un número par.

En resumen, $p = 2k$ y $q = 2m$, es decir, m.c.d$(p, q) \neq 1$ (por ser pares). Esto contradice el hecho de que $\dfrac{p}{q}$ es una fracción irreducible, pues partimos de la hipótesis de que m.c.d(p, q)=1, (p y q son coprimos).

Así pues no queda otra que $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$, pues si se supone lo contrario se llega a un absurdo.